Rekursion og algoritmedesign

Rekursion

- **Rekursiv definition** af *X*: *X* defineres i termer af sig selv.
- Rekursion er nyttig, når en **generel** version af *X* kan defineres i termer af **simplere** versioner af *X*.
- Et problem **løses rekursivt** ved
  - (1) at **nedbryde** det i mindre delproblemer af samme slags,
  - (2) **fortsætte** med dette indtil delproblemerne er så simple, at de umiddelbart kan løses, og
  - (3) **kombinere** løsningerne af delproblemerne til en løsning af det oprindelige problem.

for at opnå

- simple og præcise definitioner
- elegante løsninger på problemer, der ellers er svære at løse
- algoritmer, der er simple at analysere

Del-og-hersk

(1) Del problemet op i mindre delproblemer.

(2) Hersk ved at løse hvert delproblem.

(3) Kombiner resultaterne til en løsning for det oprindelige problem.

Hvis delproblemerne er mindre udgaver af det oprindelige problem, kan **rekursion** ofte benyttes med fordel.

Del-og-hersk
ved rekursion

Pseudokode:

```
solve(Problem p) {
    if (size(p) <= critical_size)
        solve_small_problem(p);
    else {
        subproblem = divide(p);
        solve(subproblem[0]);
        solve(subproblem[1]);
        ....
        combine_solutions();
    }
}
```


Eksempel
Beregning af den maksimale delsekvenssum

Problem. Givet en sekvens $(a_1, a_2, .., a_n)$ af reelle tal.
Find en delsekvens $(a_i, a_{i+1}, .., a_j)$ af konsekutive elementer, sådan at summen af dens elementer er størst mulig.

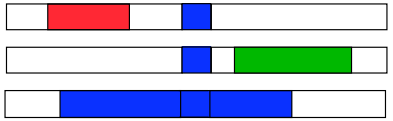
Opdel problemet i to omtrent lige store dele:

Enten findes den maksimale delsekvens

(1) helt i den venstre del,

(2) helt i den højre del, eller

(3) i en sekvens, der indeholder midterelementet



3 delproblemer

De to første værdier bestemmes ved rekursion.

Den sidste værdi bestemmes som summen af

- det maksimale suffix for sekvensen til venstre for midterelementet (inklusiv dette), og
- det maksimale prefix for sekvensen til højre for midterelementet.

Den maskimale delsekvenssum bestemmes som maksimum af disse 3 værdier.

Javakode

```
int maxSum(int[] a, int left, int right) {
    if (left == right)
        return a[left] > 0 ? a[left] : 0;
    int mid = (left + right) / 2;
    return max3(maxSum(a, left, mid - 1),
                maxSum(a, mid + 1, right),
                maxSuffix(a, left, mid) + maxPrefix(a, mid + 1, right));
}
```

```
int maxSuffix(int[] a, int left, int right) {
    int sum = 0, maxSum = 0;
    for (int i = right; i >= left; i--)
        if ((sum += a[i]) > maxSum)
            maxSum = sum;
    return maxSum;
}
```

`maxPrefix` implementeres analogt

Kompleksitet

Tiden, det tager at løse et problem med n tal, $T(n)$, hvor n er en potens af 2, opfylder rekursionsligningerne

$$T(n) = 2*T(n/2) + O(n)$$
$$T(1) = O(1)$$

Hvis $O(n)$ og $O(1)$ erstattes med henholdsvis n og 1, bliver løsningen

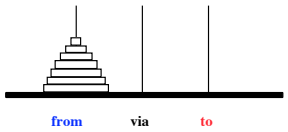
$$T(n) = n\log n + n$$

Der gælder således, at

$$T(n) = O(n \log n)$$

Tårnene i Hanoi

(fra et munkekloster i Tibet)



Problem. Flyt skiverne fra pinden `from` til pinden `to`, idet en større skive aldrig må placeres oven på en mindre skive.

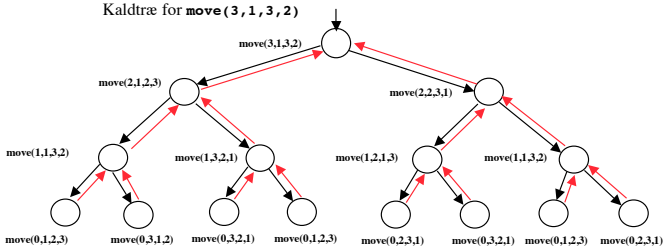
At flytte n skiver fra pinden `from` til pinden `to` kan foretages ved først at flytte de øverste n-1 skiver fra pinden `from` til pinden `via`.

Dernæst flyttes den nederste skive fra pinden `from` til pinden `to`.

Endelig flyttes de n-1 skiver fra pinden `via` til pinden `to`.


```
void move(int n, int from, int to, int via) {
    if (n == 0)
        return;
    move(n-1, from, via, to);
    System.out.println("Move " + from + " to " + to);
    move(n-1, via, to, from);
}
```

Kaldtræ for `move(3,1,3,2)`



Effektivitetsanalyse

Tidsforbruget er proportionalt med antallet af flytninger, $F(n)$, hvor n angiver antallet af skiver.

$$F(n) = F(n\text{-}1) + 1 + F(n\text{-}1) = 2*F(n\text{-}1) + 1, \text{ for } n > 1$$
$$F(1) = 1$$

som har løsningen $2^n - 1$.

Pladsforbruget er proportionalt med det maksimale antal uafsluttede kald af `move`, dvs. n.

Samlet tidsforbrug for 64 skiver, hvis hver flytning tager 1 sekund:

$$2^{64} \text{ sekunder} \approx 10^{19} \text{ sekunder} \approx 10^{12} \text{ år}$$

Fundamentale regler for rekursion

- **Basistilfælde**: Hav altid mindst et tilfælde, der kan løses uden brug af rekursion.
- **Gør fremskridt**: Ethvert rekursivt kald bør nærme sig et basistilfælde.
- **Tro på det**: Antag altid, at et rekursivt kald virker som ønsket.
- **Undgå dobbeltarbejde**: Sørg for at hvert delproblem kun løses én gang.

Benyt aldrig rekursion som en erstatning for en simpel løkke.