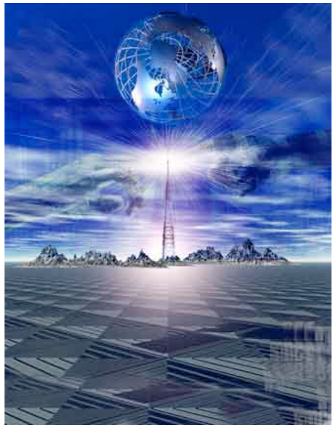
# Algoritmedesign



1

# Den grådige metode

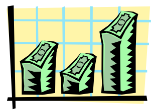
2

## Den grådige metode

- Et problem løses ved at foretage en række beslutninger
- Beslutningerne træffes en ad gangen i en eller anden rækkefølge
- Hver beslutning er baseret på et grådighedskriterium
- Når en beslutning er truffet, ændres den (sædvanligvis) ikke senere

3

## Den grådige metode



Den **grådige metode** er et generelt paradigme til algoritmedesign, der bygger på følgende to elementer:

- **Konfigurationer**: forskellige sæt af værdier, der skal findes
- **Objektfunktion**: en score knyttet til konfigurationerne, som vi ønsker at maksimere eller minimere

Metoden virker bedst, når den anvendes på problemer, der har **grådigt-valg-egenskaben**:

> En *globalt* optimal løsning kan altid findes ved en række *lokale* forbedringer ud fra en startkonfiguration

4

# Møntveksling

**Problem**: Et beløb, der skal opnås, og en samling mønter, der kan bruges for at opnå dette beløb

**Konfiguration**: Det beløb, der endnu mangler at blive givet til kunden, plus de mønter, der allerede er givet

**Objektfunktion**: Antallet af mønter (skal minimeres)

**Grådig metode**: Benyt altid den størst mulige mønt

Eksempel 1: Mønterne er 1, 5, 10 og 25 cent

Har grådigt-valg-egenskaben. Intet beløb over 25 cent kan opnås med et minimalt antal mønter uden brug af 25-cent mønten (tilsvarende for beløb under 25 cent, men over 10 cent, og beløb under 10 cent men, over 5 cent)

Eksempel 2: Mønterne er 1, 5, 10, 21 og 25 cent

Har ikke grådigt-valg-egenskaben. Beløbet 42 cent opnås bedst med to 21 cent mønter, men den grådige algoritme giver en løsning med 5 mønter (hvilke?)



# Det fraktionelle rygsækproblem

**Givet**: En mængde $\boldsymbol{S}$ af $\boldsymbol{n}$ emner, hvor hvert emne $\boldsymbol{i}$ har

$\boldsymbol{b_i}$ - en positiv nytteværdi (benefit)

$\boldsymbol{w_i}$ - en positiv vægt (weight)

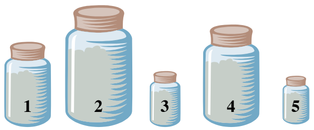
**Mål**: Vælg emner med maksimal samlet nytteværdi, men med samlet vægt på højst $\boldsymbol{W}$

Hvis det er muligt at tage vilkårlige brøkdele af emnerne, er der tale om **det fraktionelle rygsækproblem**

- Lad $\boldsymbol{x_i}$ betegne den mængde, vi tager af emnet $\boldsymbol{i}$ ($0 \le \boldsymbol{x_i} \le \boldsymbol{w_i}$)
- **Mål:** Maksimer $\sum_{i \in S} b_i (x_i / w_i)$
- **Begrænsning**: $\sum_{i \in S} x_i \le W$



# Eksempel




| Emner: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Vægt: | 4 ml | 8 ml | 2 ml | 6 ml | 1 ml |
| Nytteværdi: | 12 kr | 32 kr | 40 kr | 30 kr | 50 kr |
| Værdi: (kr per ml) | 3 | 4 | 20 | 5 | 50 |

10 ml

"rygsæk"

Løsning:
- 1 ml af 5
- 2 ml af 3
- 6 ml af 4
- 1 ml af 2



# Algoritme for det fraktionelle rygsækproblem

**Grådigt valg**: Tag altid det emne, der har størst **værdi** (forholdet imellem nytteværdi og vægt)

$$\sum_{i \in S} b_i (x_i / w_i) = \sum_{i \in S} (b_i / w_i) x_i$$

**Køretid**: $\boldsymbol{O}(n \log n)$. Hvorfor?

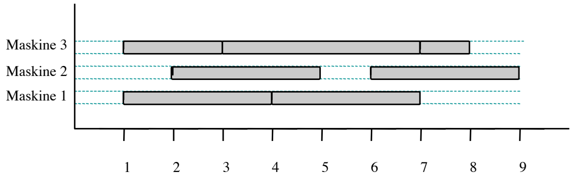
**Korrekthed**: Antag, at der en bedre løsning, d.v.s. der findes et emne $\boldsymbol{i}$ med højere værdi end et valgt emne $\boldsymbol{j}$ ($\boldsymbol{x_j} > 0$ og $\boldsymbol{v_i} > \boldsymbol{v_j}$), men hvor $\boldsymbol{x_i} < \boldsymbol{w_i}$. Hvis vi erstatter noget af $\boldsymbol{j}$ med noget af $\boldsymbol{i}$, kan vi opnå en bedre løsning. Hvor meget af emne $\boldsymbol{i}$ kan vi erstatte uden at ændre den samlede vægt?
Svar: $\min\{\boldsymbol{w_i} - \boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{x_j}\}$

```
Algorithm fractionalKnapsack(S, W)
    Input: set S of items with benefit
        b_i and weight w_i; max. weight W
    Output: amount x_i of each item i
        to maximize benefit with weight
        at most W
    for each item i in S do
        x_i ← 0
        v_i ← b_i / w_i          {value}
    w ← 0                        {total weight}
    while w < W do
        remove item i with highest v_i
        x_i ← min{w_i , W - w}
        w ← w + x_i
```

## Planlægning af opgaver

**Givet**: en mængde *T* af opgaver (tasks), der hver har
et starttidspunkt, $s_i$
et sluttidspunkt, $f_i$ (hvor $s_i < f_i$)

**Mål**: Udfør alle opgaverne ved brug af så få maskiner som muligt






## Algoritme til opgaveplanlægning

**Grådigt valg**: ordn opgaverne efter deres starttidspunkt og brug så få maskiner som muligt med denne rækkefølge

**Køretid**: $O(n \log n)$. Hvorfor?

**Korrekthed**: Antag, at der findes en bedre plan, d.v.s. algoritmen finder en løsning med $m$ maskiner, men der findes en løsning med $m$-1 maskiner.

Lad $m$ være den sidste maskine, der allokeres af algoritmen, og lad $i$ være den første opgave, der udføres på denne maskine. Opgave $i$ må være i konflikt med $m$-1 andre opgaver.

Der findes derfor ingen plan med kun $m$-1 maskiner.

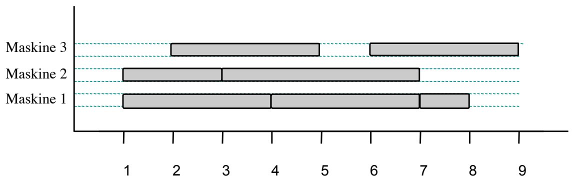
**Algorithm** *taskSchedule*(***T***)
  **Input:** set $T$ of tasks with start time $s_i$ and finish time $f_i$
  **Output:** non-conflicting schedule with minimum number of machines
  $m \leftarrow 0$  {no. of machines}
  **while** *T is not empty* **do**
    *remove task i with smallest* $s_i$
    **if** *there's a machine j for i* **then**
      *schedule i on machine j*
    **else**
      $m \leftarrow m + 1$
      *schedule i on machine m*



## Eksempel

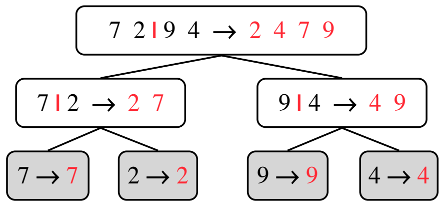
**Givet**: en mængde *T* af opgaver (tasks), der hver har
et starttidspunkt, $s_i$
et sluttidspunkt, $f_i$ (hvor $s_i < f_i$)
[1,4], [1,3], [2,5], [3,7], [4,7], [6,9], [7,8] (ordnet efter starttidspunkt)

**Mål**: Udfør alle opgaverne ved brug af så få maskiner som muligt






# Del-og-hersk



# Del-og-hersk

**Del-og-hersk** er et generelt paradigme til algoritmedesign

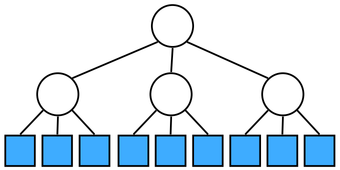
**Del**: opdel inddata $S$ i to eller flere disjunkte delmængder, $S_1$, $S_2$, ...

**Løs**: løs delproblemerne rekursivt

**Hersk**: kombiner løsningerne for $S_1$, $S_2$, ... til en løsning for $S$

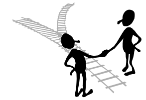
Basistilfældet for rekursionen er delproblemer af "tilpas lille" størrelse

Analyse kan foretages ved hjælp af **rekursionsligninger**





# Merge-sort (tilbageblik)



Merge-sort på en input-sekvens $S$ med $n$ elementer består at tre trin:

**Del**: opdel $S$ i to sekvenser, $S_1$ og $S_2$, hver med cirka $n$/2 elementer

**Løs**: sorter rekursivt $S_1$ og $S_2$

**Hersk**: flet $S_1$ og $S_2$ til en sorteret sekvens

**Algorithm** *mergeSort*($S$, $C$)
  **Input** sequence $S$ with $n$ elements, comparator $C$
  **Output** sequence $S$ sorted according to $C$
  **if** $S.size() > 1$
    $(S_1, S_2) \leftarrow$ ***partition***$(S, n/2)$
    ***mergeSort***$(S_1, C)$
    ***mergeSort***$(S_2, C)$
    $S \leftarrow$ ***merge***$(S_1, S_2)$



# Analyse med rekursionsligninger

Hersk-trinet i merge-sort består i fletning af to sorterede sekvenser, hver med $n$/2 elementer

Hvis der benyttes en hægtet liste, kan det gøres med højst $bn$ skridt for en konstant værdi $b$

Basistilfældet bruger højst $b$ skridt

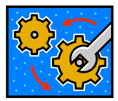
Hvis $T(n)$ betegner køretiden for merge-sort, har vi:

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{hvis } n < 2 \\ 2T(n/2) + bn & \text{hvis } n \geq 2 \end{cases}$$

Vi kan derfor analysere køretiden for merge-sort ved at finde en løsning på **lukket form** for denne ligning (d.v.s. en løsning, hvor $T(n)$ kun forekommer på venstre side af lighedstegnet)



# Iterativ substitution



Ved teknikken **iterativ substitution** anvender vi gentagne gange rekursionsligningen på sig selv for at finde et mønster:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + bn \\ &= 2(2T(n/2^2) + b(n/2)) + bn \\ &= 2^2T(n/2^2) + 2bn \\ &= 2^3T(n/2^3) + 3bn \\ &= 2^4T(n/2^4) + 4bn \\ &= \ldots \\ &= 2^iT(n/2^i) + ibn \end{aligned}$$

Basistilfældet indtræffer, når $2^i = n$, d.v.s. $i = \log n$

$$T(n) = bn + bn\log n$$

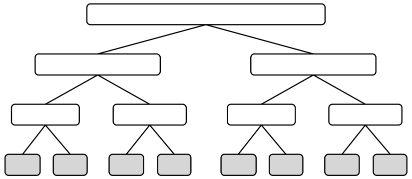
Vi kan derfor konkludere, at $T(n)$ er $O(n \log n)$

# Rekursionstræ

Tegn rekursionstræet for rekursionsligningen og led efter et mønster:

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{hvis } n < 2 \\ 2T(n/2) + bn & \text{hvis } n \geq 2 \end{cases}$$

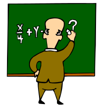
| dybde | kald | størrelse | tid |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | ***n*** | ***bn*** |
| 1 | 2 | ***n***/2 | ***bn*** |
| ***i*** | $2^i$ | ***n***/$2^i$ | ***bn*** |
| … | … | … | … |



Samlet tid = ***bn*** + ***bn*** log ***n***
(sidste niveau plus alle foregående niveauer )



# Gæt-og-test-metoden



Ved gæt og test-metoden gætter vi på en lukket form og prøver at bevise, at den er sand ved hjælp af induktion:

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{hvis } n < 2 \\ 2T(n/2) + bn\log n & \text{hvis } n \geq 2 \end{cases}$$

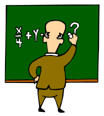
Gæt: $T(n) < cn \log n$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + bn\log n \\ &< 2(c(n/2)\log(n/2)) + bn\log n \\ &= cn(\log n - \log 2) + bn\log n \\ &= cn\log n - cn + bn\log n \end{aligned}$$

Forkert: vi kan ikke vise, at udtrykket i den sidste linje er mindre end $cn \log n$



# Gæt-og-test-metoden (del 2)



$$T(n) = \begin{cases} b & \text{hvis } n < 2 \\ 2T(n/2) + bn\log n & \text{hvis } n \geq 2 \end{cases}$$

Gæt 2: $T(n) < cn \log^2 n$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + bn\log n \\ &< 2(c(n/2)\log^2(n/2)) + bn\log n \\ &= cn(\log n - \log 2)^2 + bn\log n \\ &= cn\log^2 n - 2cn\log n + cn + bn\log n \\ &\leq cn\log^2 n \end{aligned}$$

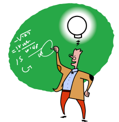
hvis $c > b$

Så $T(n)$ er $O(n \log^2 n)$

For at bruge denne metode skal man være god til at gætte og god til at føre induktionsbeviser



# Mestermetoden



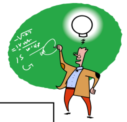
Mange del-og-hersk rekursionsligninger har formen

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{hvis } n < d \\ aT(n/b) + f(n) & \text{hvis } n \geq d \end{cases}$$

**Mestersætningen**:

1. $f(n)$ er $O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \Rightarrow T(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a})$
2. $f(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a} \log^k n) \Rightarrow T(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$
3. $f(n)$ er $\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \Rightarrow T(n)$ er $\Theta(f(n))$
   forudsat $\exists \delta < 1: af(n/b) \leq \delta f(n)$ for $n \geq d$

## Mestermetoden, eksempel 1



Form

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{hvis } n < d \\ aT(n/b) + f(n) & \text{hvis } n \geq d \end{cases}$$

Mestersætningen:

1. $f(n)$ er $O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \Rightarrow T(n)\ er\ \Theta(n^{\log_b a})$
2. $f(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a} \log^k n) \Rightarrow T(n)\ er\ \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$
3. $f(n)$ er $\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \Rightarrow T(n)\ er\ \Theta(f(n))$

   forudsat $\exists \delta < 1 : af(n/b) \leq \delta f(n)\ for\ n \geq d$

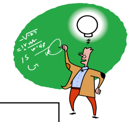
Eksempel:

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$

Løsning: $\log_b a = 2$. Tilfælde 1 siger, at $T(n)$ er $\Theta(n^2)$



## Mestermetoden, eksempel 2



Form

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{hvis } n < d \\ aT(n/b) + f(n) & \text{hvis } n \geq d \end{cases}$$

Mestersætningen:

1. $f(n)$ er $O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \Rightarrow T(n)\ er\ \Theta(n^{\log_b a})$
2. $f(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a} \log^k n) \Rightarrow T(n)\ er\ \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$
3. $f(n)$ er $\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \Rightarrow T(n)\ er\ \Theta(f(n))$

   forudsat $\exists \delta < 1 : af(n/b) \leq \delta f(n)\ for\ n \geq d$

Eksempel:

$$T(n) = 2T(n/2) + n \log n$$

Løsning: $\log_b a = 1$. Tilfælde 2 siger, at $T(n)$ er $\Theta(n \log^2 n)$



## Mestermetoden, eksempel 3

Form

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{hvis } n < d \\ aT(n/b) + f(n) & \text{hvis } n \geq d \end{cases}$$

Mestersætningen:

1. $f(n)$ er $O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \Rightarrow T(n)\ er\ \Theta(n^{\log_b a})$
2. $f(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a} \log^k n) \Rightarrow T(n)\ er\ \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$
3. $f(n)$ er $\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \Rightarrow T(n)\ er\ \Theta(f(n))$

   forudsat $\exists \delta < 1 : af(n/b) \leq \delta f(n)\ for\ n \geq d$

Eksempel:

$$T(n) = T(n/3) + n \log n$$

Løsning: $\log_b a = 0$. Tilfælde 3 siger, at $T(n)$ er $\Theta(n \log n)$



## Mestermetoden, eksempel 4

Form

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{hvis } n < d \\ aT(n/b) + f(n) & \text{hvis } n \geq d \end{cases}$$

Mestersætningen:

1. $f(n)$ er $O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \Rightarrow T(n)\ er\ \Theta(n^{\log_b a})$
2. $f(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a} \log^k n) \Rightarrow T(n)\ er\ \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$
3. $f(n)$ er $\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \Rightarrow T(n)\ er\ \Theta(f(n))$

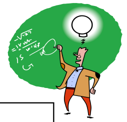
   forudsat $\exists \delta < 1 : af(n/b) \leq \delta f(n)\ for\ n \geq d$

Eksempel:

$$T(n) = 8T(n/2) + n^2$$

Løsning: $\log_b a = 3$. Tilfælde 1 siger, at $T(n)$ is $\Theta(n^3)$

## Mestermetoden, eksempel 5



Form

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{hvis } n < d \\ aT(n/b) + f(n) & \text{hvis } n \ge d \end{cases}$$

Mestersætningen:

1. $f(n)$ er $O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \Rightarrow T(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a})$
2. $f(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a} \log^k n) \Rightarrow T(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$
3. $f(n)$ er $\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \Rightarrow T(n)$ er $\Theta(f(n))$

   forudsat $\exists \delta < 1 : af(n/b) \le \delta f(n)$ for $n \ge d$

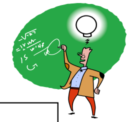
Eksempel:

$$T(n) = 9T(n/3) + n^3$$

Løsning: $\log_b a = 3$. Tilfælde 3 siger, at $T(n)$ is $\Theta(n^3)$



## Mestermetoden, eksempel 6



Form

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{hvis } n < d \\ aT(n/b) + f(n) & \text{hvis } n \ge d \end{cases}$$

Mestersætningen:

1. $f(n)$ er $O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \Rightarrow T(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a})$
2. $f(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a} \log^k n) \Rightarrow T(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$
3. $f(n)$ er $\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \Rightarrow T(n)$ er $\Theta(f(n))$

   forudsat $\exists \delta < 1 : af(n/b) \le \delta f(n)$ for $n \ge d$

Eksempel:

$T(n) = T(n/2) + 1$ (binær søgning)

Løsning: $\log_b a = 0$. Tilfælde 2 siger, at $T(n)$ is $\Theta(\log n)$



## Mestermetoden, eksempel 7

Form

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{hvis } n < d \\ aT(n/b) + f(n) & \text{hvis } n \ge d \end{cases}$$

Mestersætningen:

1. $f(n)$ er $O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \Rightarrow T(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a})$
2. $f(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a} \log^k n) \Rightarrow T(n)$ er $\Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$
3. $f(n)$ er $\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \Rightarrow T(n)$ er $\Theta(f(n))$

   forudsat $\exists \delta < 1 : af(n/b) \le \delta f(n)$ for $n \ge d$

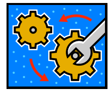
Eksempel:

$T(n) = 2T(n/2) + \log n$ (hob-konstruktion)

Løsning: $\log_b a = 1$. Tilfælde 1 siger, at $T(n)$ is $\Theta(n)$



## Iterativt "bevis" for mestersætningen



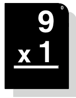
Ved hjælp af iterativ substitution findes et mønster:

$$\begin{aligned} T(n) &= aT(n/b) + f(n) \\ &= a(aT(n/b^2)) + f(n/b)) + bn \\ &= a^2T(n/b^2) + af(n/b) + f(n) \\ &= a^3T(n/b^3) + a^2f(n/b^2) + af(n/b) + f(n) \\ &= \ldots \\ &= a^{\log_b n}T(1) + \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i f(n/b^i) \\ &= n^{\log_b a}T(1) + \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i f(n/b^i) \end{aligned}$$

Vi skelner imellem tre tilfælde:

1. Det første led i summen er dominerende
2. Ledene i summationen er lige dominerende
3. Summationen er en kvotientrække

## Heltalsmultiplikation




**Algoritme**: Multiplicer to $n$-bit heltal $I$ og $J$

- Opdeling: Opsplit $I$ og $J$ i højordens- og lavordens-bits:

$$I = I_h 2^{n/2} + I_l$$
$$J = J_h 2^{n/2} + J_l$$

| | |
|---|---|
| $I_h$ | $I_l$ |
| $J_h$ | $J_l$ |

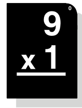
- Vi kan så bestemme $I*J$ ved at multiplicere delene og addere:

$$I*J = (I_h 2^{n/2} + I_l)*(J_h 2^{n/2} + J_l)$$
$$= I_h J_h 2^n + I_h J_l 2^{n/2} + I_l J_h 2^{n/2} + I_l J_l$$

- $T(n) = 4T(n/2) + cn$, hvilket medfører, at $T(n)$ er $\Theta(n^2)$
- Men det er ikke bedre end den algoritme, vi lærte i skolen



## Forbedret algoritme




**Algoritme**: Multiplicer to $n$-bit heltal $I$ og $J$

- Opdeling: Opsplit $I$ og $J$ i højordens- og lavordens-bits:

$$I = I_h 2^{n/2} + I_l$$
$$J = J_h 2^{n/2} + J_l$$

| | |
|---|---|
| $I_h$ | $I_l$ |
| $J_h$ | $J_l$ |

- Der findes en anden måde at multiplicere delene:

$$I*J = I_h J_h 2^n + [(I_h - I_l)(J_l - J_h) + I_h J_h + I_l J_l] 2^{n/2} + I_l J_l$$
$$= I_h J_h 2^n + [(I_h J_l - I_l J_l - I_h J_h + I_l J_h) + I_h J_h + I_l J_l] 2^{n/2} + I_l J_l$$
$$= I_h J_h 2^n + (I_h J_l + I_l J_h) 2^{n/2} + I_l J_l$$

- $T(n) = 3T(n/2) + cn$, hvilket medfører, at $T(n)$ er $\Theta(n^{\log_2 3})$
- $T(n)$ er $\Theta(n^{1.585})$

$\boxed{\text{Med FFT kan opnås en } \Theta(n \log n) \text{ algoritme}}$



# Dynamisk programmering



## Dynamisk programmering

**Del-og-hersk** (top-til-bund, top-down):
For at løse et stort problem deles problemet op i mindre delproblemer, der løses uafhængigt af hinanden

**Dynamisk programmering** (bund-til-top, bottom-up):
For at løse et stort problem løses <u>alle</u> mindre delproblemer, og deres løsninger gemmes og benyttes til at løse større problemer.
Således fortsættes, indtil problemet er løst

Betegnelsen stammer fra operationsanalysen, hvor "programmering" benyttes om *formulering* af et problem, således at en bestemt metode kan anvendes

# Moderne definition

**Dynamisk programmering**:
Bund-til-top implementering af rekursive programmer med overlappende delproblemer

Top-til-bund implementering er dog også mulig

Dynamisk programmering er baseret på følgende simple princip:

**Undgå at gentage beregninger**



# Beregning af Fibonacci-tal

(Fibonacci, 1202)

F(n) = F(n-1) + F(n-2) for n >= 2
F(0) = 0
F(1) = 1

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 3 |
| 5 | 5 |
| 6 | 8 |
| 7 | 13 |
| 8 | 21 |
| 9 | 34 |

| | |
|---|---|
| 10 | 55 |
| 11 | 89 |
| 12 | 144 |
| 13 | 233 |
| 14 | 377 |
| 15 | 610 |
| 16 | 987 |
| 17 | 1597 |
| 18 | 2584 |
| 19 | 4181 |

| | |
|---|---|
| 20 | 6765 |
| 21 | 10946 |
| 22 | 17711 |
| 23 | 28657 |
| 24 | 46368 |
| 25 | 75025 |
| 26 | 121393 |
| 27 | 196418 |
| 28 | 317811 |
| 29 | 514229 |

Talrækken vokser eksponentielt:
F(n)/F(n-1) går imod 1.618... (det gyldne snit = $(1+\sqrt{5})/2$)



# Top-til-bund-tilgang

```
int F(int n) {
    return n <= 1 ? n : F(n-1) + F(n-2);
}
```

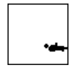
Simpel, men meget ineffektiv
Antallet af kald, $C(n)$, tilfredsstiller rekursionsligningerne
$C(n) = C(n\text{-}1) + C(n\text{-}2) + 1$,
$C(1) = C(0) = 1$
som har løsningen $C(n) = F(n{+}2) + F(n\text{-}1) - 1$.
$C(n)$ er altså større end det Fibonacci-tal, der skal beregnes!

Ineffektiviteten skyldes, at de samme delproblemer løses mange gange

F.eks. F(9) = F(8) + F(7) = F(7) + F(6) + F(7) =
F(6) + F(5) + F(6) + F(6) + F(5)



# Undgå genberegninger



(benyt "caching")

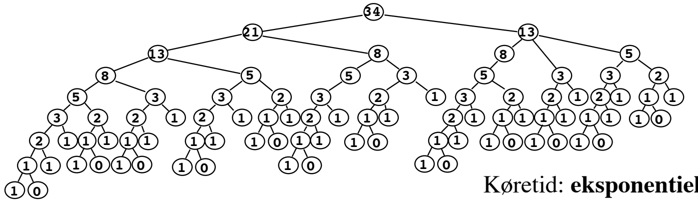
Vedligehold en tabel (indiceret ved parameterværdien) indeholdende
* 0, hvis den rekursive metode endnu ikke er kaldt med denne parameterværdi
* ellers det resultat, der skal returneres

Første kald af metoden for en given parameterværdi: beregn som før, men gem desuden resultatet
Efterfølgende kald med samme parameterværdi: returner resultatet fra det første kald

```
int F(int n) {
    if (Fknown[n] != 0)
        return Fknown[n];
    int r = n <= 1 ? n : F(n-1) + F(n-2);
    Fknown[n] = r;
    return r;
}
```

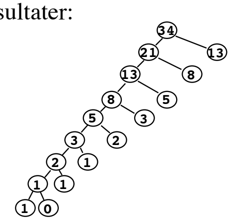
# Effektivitetsforbedring

Simpel rekursiv metode: F(9)



Køretid: **eksponentiel**

Husk kendte resultater:



Køretid: **lineær**



# Bund-til-top-tilgang

Dynamisk programmering (traditionel):

* Tabellæg løsningerne til delproblemerne
* Opbyg tabellen i stigende orden af problemstørrelse
* Benyt gemte løsninger til at bestemme nye løsninger

Eksempel: Dynamisk programmering til beregning af Fibonacci-tal:

```
F[0] = 0; F[1] = 1;
for (i = 2; i <= n; i++)
    F[i] = F[i-1] + F[i-2];
```

Tidsforbruget er lineært



# Optimal møntveksling

Udbetal et beløb i mønter, således at antallet af mønter er minimalt

Eksempel:

Hvis beløbet skal udbetales i amerikanske cents, kan mønterne 1-, 5-, 10- og 25-cent benyttes
Veksling af 63 cents kan da foretages med **6** mønter, nemlig **to** 25-cent, **en** 10-cent og **tre** 1-cent

For disse mønter vil en **grådig** algoritme altid give en optimal løsning
Men hvis der indføres en 21-cent-mønt, virker denne metode ikke



# Top-til-bund-løsning

Beregn for hver mønt det minimale antal mønter, der kan benyttes til at veksle det resterende beløb. Tag minimum

```
int[] coins = {1, 5, 10, 21, 25};
```

```
int makeChange(int change) {
    if (change == 0)
        return 0;
    int min = Integer.MAX_VALUE;
    for (int i = 0; i < coins.length; i++)
        if (change >= coins[i])
            min = Math.min(min,
                           1 + makeChange(change - coins[i]));
    return min;
}
```

Benyt **ikke** denne algoritme! Eksponentielt tidsforbrug.
Undgå genberegninger.

# Genbrug kendte løsninger

```
int makeChange(int change) {
    if (change <= 0)
        return 0;
    if (minKnown[change] > 0)
        return minKnown[change];
    int min = Integer.MAX_VALUE;
    for (int i = 0; i < coins.length; i++)
        if (change >= coins[i])
            min = Math.min(min,
                  1 + makeChange(change - coins[i]));
    minKnown[change] = min;
    return min;
}
```



# Udskrivning af mønterne i en optimal veksling

Gem i en tabel, **`lastCoin`**, for ethvert beløb den sidst valgte mønt i en optimal veksling af beløbet

```
while (change > 0) {
    System.out.println(lastCoin[change]);
    change -= lastCoin[change];
}
```



```
int makeChange(int change) {
    if (change <= 0)
        return 0;
    if (minKnown[change] > 0)
        return minKnown[change];
    int min = Integer.MAX_VALUE, minCoin = 0;
    for (int i = 0; i < coins.length; i++)
        if (change >= coins[i]) {
            int m = 1 + makeChange(change - coins[i]);
            if (m < min)
              { min = m; minCoin = coins[i]; }
        }
    lastCoin[change] = minCoin;
    minKnown[change] = min;
    return min;
}
```



# Bund-til-top-løsning

(uden rekursion)

Brug fundne løsninger til at bestemme den næste løsning

```
int makeChange(int change) {
    minKnown[0] = 0;
    for (int c = 1; c <= change; c++) {
        int min = Integer.MAX_VALUE;
        for (int i = 0; i < coins.length; i++)
            if (c >= coins[i])
                min = Math.min(min,
                      1 + minKnown[change - coins[i]]);
        minKnown[c] = min;
    }
    return minKnown[change];
}
```

Køretiden er proportional med **`change*coins.length`**

# Matrix-kædeprodukter

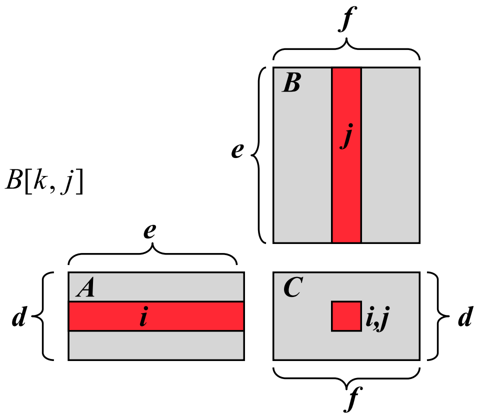
Dynamisk programmering er et generelt paradigme til algoritmedesign

Matrixmultiplikation:

- ***C*** = ***A**B**
- ***A*** er ***d*** x ***e***, og ***B*** er ***e*** x ***f***

$$C[i,j]=\sum_{k=0}^{e-1}A[i,k]*B[k,j]$$

- Køretiden er ***O***(***def***)






# Matrix-kædeprodukter

**Matrix-kædeprodukt:**

Beregn A = $A_0*A_1*\ldots*A_{n\text{-}1}$

$A_i$ er $d_i$ x $d_{i+1}$

Problem: Hvor skal parenteserne placeres?

Eksempel:

B er 3 x 100

C er 100 x 5

D er 5 x 5

(B*C)*D bruger 1500 + 75 = 1575 multiplikationer

B*(C*D) bruger 1500 + 2500 = 4000 multiplikationer



# Et større eksempel

A er en 13 x 5 matrix

B er en 5 x 89 matrix

C er en 89 x 3 matrix

D er en 3 x 34 matrix

((AB)C)D :

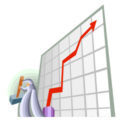
| | |
|---|---|
| AB : | 13*5*89 = 5785 multiplikationer |
| (AB)C : | 13*89*3 = 3471 multiplikationer |
| ((AB)C)D : | 13*3*34 = 1326 multiplikationer |
| i alt | 10582 multiplikationer |

Nogle andre muligheder:

| | | |
|---|---|---|
| (AB)(CD) : | 54201 multiplikationer | |
| A((BC)D) : | 4055 multiplikationer | |
| A(B(CD)) : | 26418 multiplikationer | |
| (A(BC))D : | **2856** multiplikationer | **(optimum)** |



# En opregnende metode



**Matrix-kædeprodukt algoritme**:

- Prøv alle mulig måder at sætte parenteser i $A_0*A_1*\ldots*A_{n\text{-}1}$
- Beregn antallet af operationer for hver mulighed
- Vælg den, der er bedst

Køretid: Antallet af muligheder er lig med antallet af binære træer med *n* knuder

Dette tal vokser **eksponentielt**! Det kaldes for det *catalanske tal* og er næsten $4^n$ $(\Omega(4^n / n^{3/2}))$

Dette er er en rædselsfuld algoritme!

# En grådig metode

**Ide 1**: Vælg produkterne et ad gangen. Vælg altid det produkt, der (for)bruger flest multiplikationer

Modeksempel:
- A er 10 x 5
- B er 5 x 10
- C er 10 x 5
- D er 5 x 10
- Ide 1 giver (A*B)*(C*D), som bruger 500+1000+500 = 2000 multiplikationer
- Men A*((B*C)*D) bruger færre, nemlig 500+250+250 = 1000 multiplikationer



# En anden grådig metode

**Ide 2**: Vælg produkterne et ad gangen. Vælg altid det produkt, der kræver færrest multiplikationer

Modeksempel:
- A is 101 x 11
- B is 11 x 9
- C is 9 x 100
- D is 100 x 99
- Ide 2 giver A*((B*C)*D), som bruger 109989+9900+108900=228789 multiplikationer
- Men (A*B)*(C*D) bruger færre, nemlig 9999+89991+89100=189090 multiplikationer



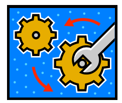
# En rekursiv metode

Definer **delproblemer**:
- Find den **bedste** parentesplacering for $A_i$*$A_{i+1}$*…*$A_j$
- Lad $N_{i,j}$ betegne antallet af multiplikationer, der foretages for dette delproblem
- Det minimale antal multiplikationer for hele problemet er $N_{0,n-1}$

**Optimalitet af delproblemer**: Den optimale løsning kan defineres i termer af optimale delproblemer
- Der må nødvendigvis være en sidste multiplikation for den optimale løsning (rod i udtrykstræet)
- Antag at det sidste produkt sker ved indeks $i$: ($A_0$*…*$A_i$)*($A_{i+1}$*…*$A_{n-1}$)
- Da er den optimale løsning $N_{0,n-1}$ lig med summen af $N_{0,i}$ og $N_{i+1,n-1}$, plus antal multiplikationer for den sidste matrixmultiplikation



# En karakteriserende ligning



Det globale optimum må være defineret i termer af optimale delproblemer, der afhænger af, hvor den sidste multiplikation foretages

Prøv alle mulige placeringer for den sidste multiplikation:
- Der mindes om, at $A_i$ er en $d_i$ x $d_{i+1}$ matrix
- En karakteriserende ligning for $N_{i,j}$ er:

$$N_{i,j} = \min_{i \le k < j} \{N_{i,k} + N_{k+1,j} + d_i d_{k+1} d_{j+1}\}$$

Bemærk, at delproblemerne ikke er uafhængige - **delproblemerne overlapper**

# En dynamisk programmeringsalgoritme

Da delproblemerne overlapper, bruger vi ikke rekursion

I stedet for konstrueres en optimal løsning "bottom-up"

Værdierne $N_{i,i}$ er lette at bestemme, så dem starter vi med

Så beregnes værdier for delproblemer med længde 2, 3, ... o.s.v

Køretid: $O(n^3)$

**Algorithm** ***matrixChain***(***S***):
- **Input:** sequence ***S*** of ***n*** matrices to be multiplied
- **Output:** number of operations in an optimal paranethization of ***S***
- **for** $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  - $N_{i,i} \leftarrow 0$
- **for** $b \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  - **for** $i \leftarrow 0$ **to** $n-b-1$ **do**
    - $j \leftarrow i+b$
    - $N_{i,j} \leftarrow$ **+infinity**
    - **for** $k \leftarrow i$ **to** $j-1$ **do**
      - $N_{i,j} \leftarrow \min\{N_{i,j}, N_{i,k} + N_{k+1,j} + d_i\, d_{k+1}\, d_{j+1}\}$



# Visualisering af algoritmen

$$N_{i,j} = \min_{i \le k < j}\{N_{i,k} + N_{k+1,j} + d_i d_{k+1} d_{j+1}\}$$

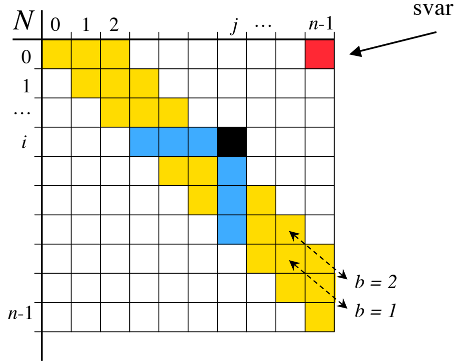
Arrayet $N$ fyldes diagonalvis

$N_{i,j}$ får værdi fra tidligere indgange i den $i$'te række og $j$'te søjle

Beregning af hvert element i tabellen tager $O(n)$ tid

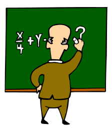
Køretid: $O(n^3)$

Den fundne parentesplacering kan gøres tilgængelig ved at huske $k$'s værdi for hvert element i $N$






# Den generelle teknik til dynamisk programmering



Anvendes på et problem, der først synes at kræve en masse tid (muligvis eksponentiel), forudsat at vi har

- **Simple delproblemer**: delproblemer kan defineres i termer af få variable, såsom $i$, $j$, $k$, $l$, $m$ o.s.v.
- **Delproblem-optimalitet**: det globale optimum kan defineres i termer af optimale delproblemer
- **Delproblem-overlap**: delproblemerne er ikke uafhængige, men overlapper (og skal derfor konstrueres "bottom-up")



# 0-1-rygsækproblemet

**Givet**: En mængde ***S*** af ***n*** emner, hvor hvert emne har
- $\boldsymbol{b_i}$ - en positiv nytteværdi (benefit)
- $\boldsymbol{w_i}$ - en positiv vægt (weight)

**Mål**: Vælg emner med maksimal samlet nytteværdi, men med samlet vægt på højst ***W***

Hvis det **ikke** er muligt at tage vilkårlige brøkdele af emnerne, er der tale om **0-1-rygsækproblemet**

Lad ***T*** betegne mængden af de emner, vi vælger

- **Mål**: Maksimer $\sum_{i \in T} b_i$
- **Begrænsning**: $\sum_{i \in T} w_i \le W$

# Eksempel

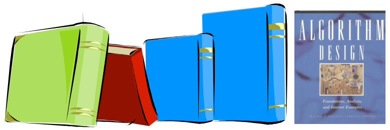
**Givet**: En mængde ***S*** af ***n*** emner, hvor hvert emne har

$\boldsymbol{b_i}$ - en positiv nytteværdi (benefit)

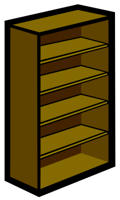
$\boldsymbol{w_i}$ - en positiv vægt (weight)

**Mål**: Vælg emner med maksimal samlet nytteværdi, men med samlet vægt på højst ***W***

Emner:




| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Vægt: | 8 cm | 4 cm | 4 cm | 12 cm | 4 cm |
| Nytteværdi: | 20 kr | 3 kr | 6 kr | 25 kr | 80 kr |



18 cm

"rygsæk"

Løsning:
- 5 (4 cm)
- 3 (4 cm)
- 1 (8 cm)



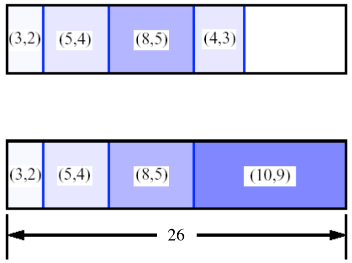
# En algoritme (første forsøg)

- Lad $S_k$ være mængden af de emner i $S$, der er nummereret fra 1 til $k$
- Definer $B[k]$ = værdi af bedste delmængde af $S_k$
- Der er **ikke** delproblem-optimalitet:

Betragt $S$={(3,2), (5,4), (8,5), (4,3), (10,9)} vægt-nytteværdi par

Bedste for $S_4$:

Bedste for $S_5$:






# En algoritme (andet forsøg)

- Lad $S_k$ være mængden af de emner i $S$, der er nummereret fra 1 til $k$
- Definer $B[k,w]$ = værdi af bedste delmængde af $S_k$ med vægt $w$
- Der **er** delproblem-optimalitet

Den bedste delmængde af $S_k$ med vægt $w$ er enten
den bedste delmængde af $S_{k-1}$ med vægt $w$, eller
den bedste delmængde af $S_{k-1}$ med vægt $w$-$w_k$, plus emnet $k$:

$$B[k,w] = \begin{cases} B[k-1,w] & \text{hvis } w_k > w \\ \max\{B[k-1,w], B[k-1,w-w_k]+b_k\} & \text{ellers} \end{cases}$$



# Algoritmen for 0-1-rygsækproblemet

$$B[k,w] = \begin{cases} B[k-1,w] & \text{hvis } w_k > w \\ \max\{B[k-1,w], B[k-1,w-w_k]+b_k\} & \text{ellers} \end{cases}$$

Da $B[k,w]$ er defineret i termer af $B[k$-1,*], kan vi bruge et endimensionalt array

Køretid: $O(nW)$

Er ikke en polynomiel algoritme, hvis $W$ er stor

Der er tale om en såkaldt **pseudo-polynomiel** algoritme

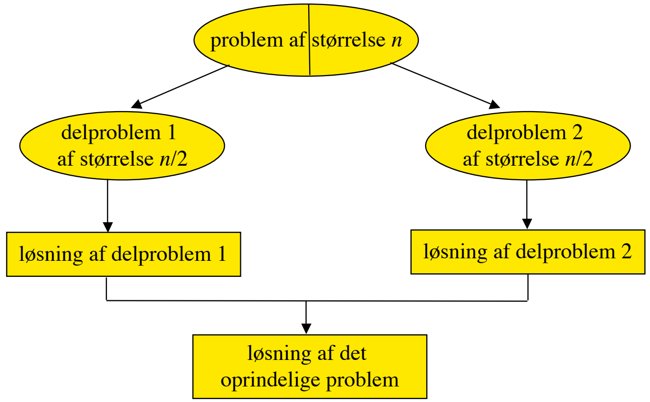
**Algorithm** ***01Knapsack***(***S, W***):
  **Input:** set ***S*** of items w/ benefit $\boldsymbol{b_i}$ and weight $\boldsymbol{w_i}$; max. weight ***W***
  **Output:** benefit of best subset with weight at most ***W***
  **for** $w \leftarrow 0$ **to** $W$ **do**
    $B[w] \leftarrow 0$
  **for** $k \leftarrow 1$ **to** $n$ **do**
    **for** $w \leftarrow w_k$ **to** $W$ **do**
      $B[w] = \max\{B[w], B[w-w_k]+b_k\}$

Fejl i lærebogen

# Designteknikker

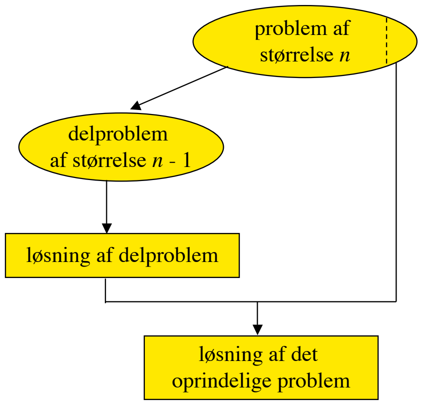


## Del-og-hersk






## Formindsk-og-hersk






## Transformer-og-hersk