Den hurtige Fourier-transformation

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Polynomier

Polynomium:

$$p(x) = 5 + 2x + 8x^2 + 3x^3 + 4x^4$$

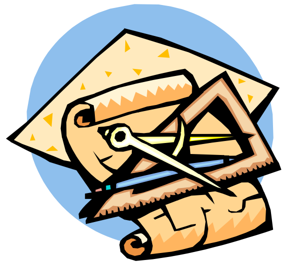
Generelt:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

eller

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

Evaluering



Horner's regel:
Givet koefficienter (a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1}), der definerer polynomiet

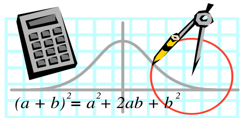
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

For givet x kan vi evaluere $p(x)$ i $O(n)$ tid ved hjælp af ligningen

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-2} + x a_{n-1})\cdots))$$

Evaluate(A, x): [hvor A=(a_0, a_1, a_2,…, a_{n-1})]
  if n=1 **then return** a_0
  else
    $A' \leftarrow (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ [antag, at dette kan gøres i $O(1)$ tid]
    return $a_0 + x$ * **Evaluate**(A', x)

Multiplikation af polynomier



Givet koefficienter $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\text{-}1})$ og $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n\text{-}1})$, som definerer to polynomier, $p(x)$ og $q\,(x)$. Bestem polynomiet $p(x)q(x)$, defineret ved

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{2n-2} c_i x^i$$

hvor

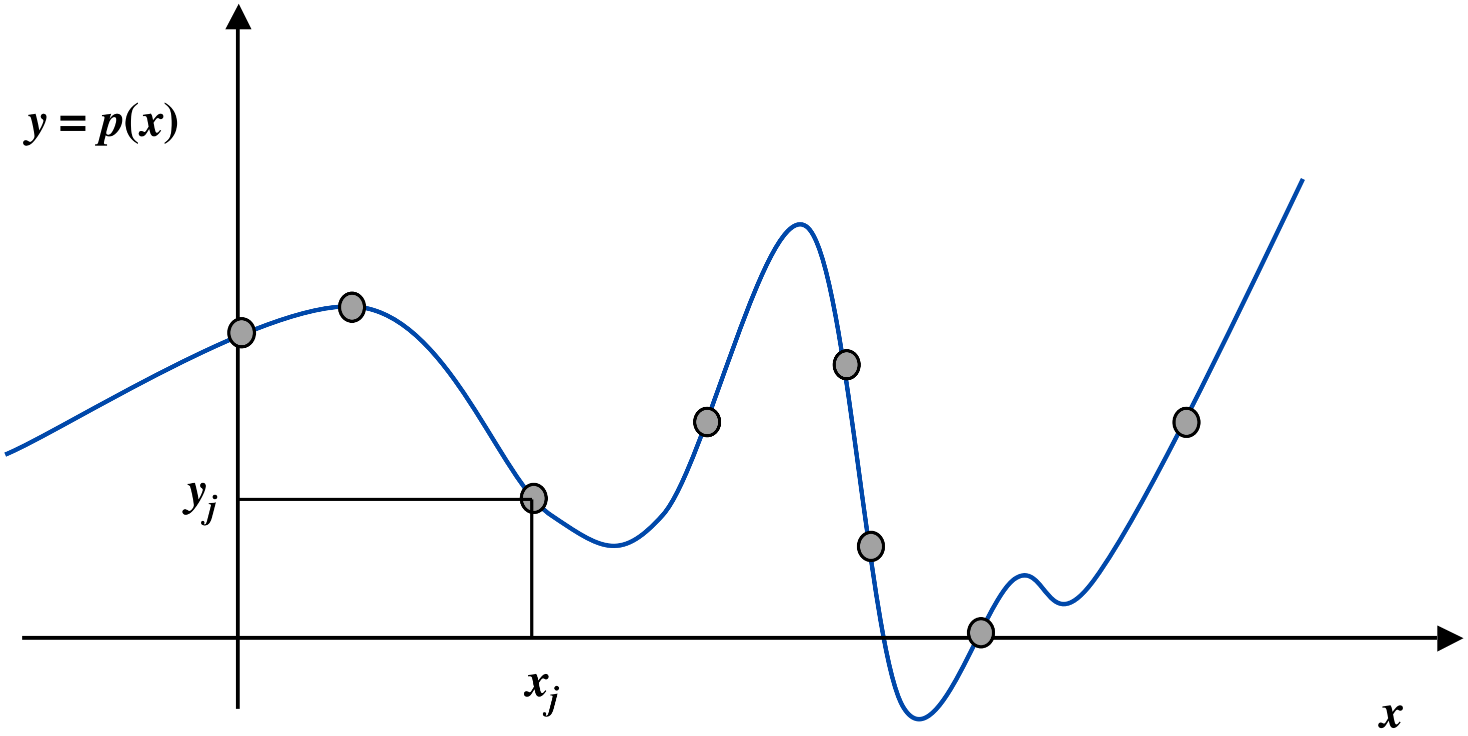
$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$$

En lige ud ad landevejen evaluering tager $O(n^2)$ tid

Den “magiske” FFT kan gøre det i $O(n \log n)$ tid

Interpolation

Lad der være givet n punkter i planet med forskellige x-koordinater. Da findes der **præcis ét** $(n\text{-}1)$'te-grad polynomium, der går igennem alle disse punkter



Interpolation og multiplikation

Alternativ metode til beregning af $p(x)q(x)$:

Beregn $p(x)$ for $2n$ værdier, $x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}$

Beregn $q(x)$ for de samme $2n$ værdier

Find det $(2n-1)$'te-grad polynomium, $r(x)$, der går igennem punkterne

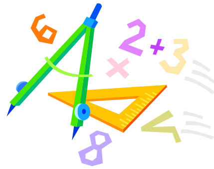
$$\{(x_0, p(x_0)q(x_0)), (x_1, p(x_1)q(x_1)), \ldots, (x_{2n-1}, p(x_{2n-1})q(x_{2n-1}))\}$$

Beregn værdien af $r(x)$

En lige ud af landevejen evaluering tager uheldigvis stadig $O(n^2)$ tid, da vi for hvert af de $2n$ punkter skal anvende Horner's regel (som tager $O(n)$ tid)

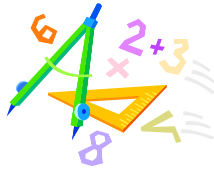
Den "magiske" FFT kan gøre det i $O(n \log n)$ tid ved at vælge $2n$ punkter, der er lette at evaluere…

Primitive enhedsrødder



Et tal ω er en **primitiv *n*'te enhedsrod**, $n > 1$, hvis

- $\omega^n = 1$
- Tallene $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ er indbyrdes forskellige



Eksempel 1 (Z^*_{11})

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
3	9	5	4	1	3	9	5	4	1
4	5	9	3	1	4	5	9	3	1
5	3	4	9	1	5	3	4	9	1
6	3	7	9	10	5	8	4	2	1
7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
8	9	6	4	10	3	2	5	7	1
9	4	3	5	1	9	4	3	5	1
10	1	10	1	10	1	10	1	10	1

2, 6, 7, 8 er 10'nde enhedsrødder i Z^*_{11}

$2^2=4$, $6^2=3$, $7^2=5$, $8^2=9$ er 5'te enhedsrødder i Z^*_{11}

$2^{-1}=6$, $3^{-1}=4$, $4^{-1}=3$, $5^{-1}=9$, $6^{-1}=2$, $7^{-1}=8$, $8^{-1}=7$, $9^{-1}=5$

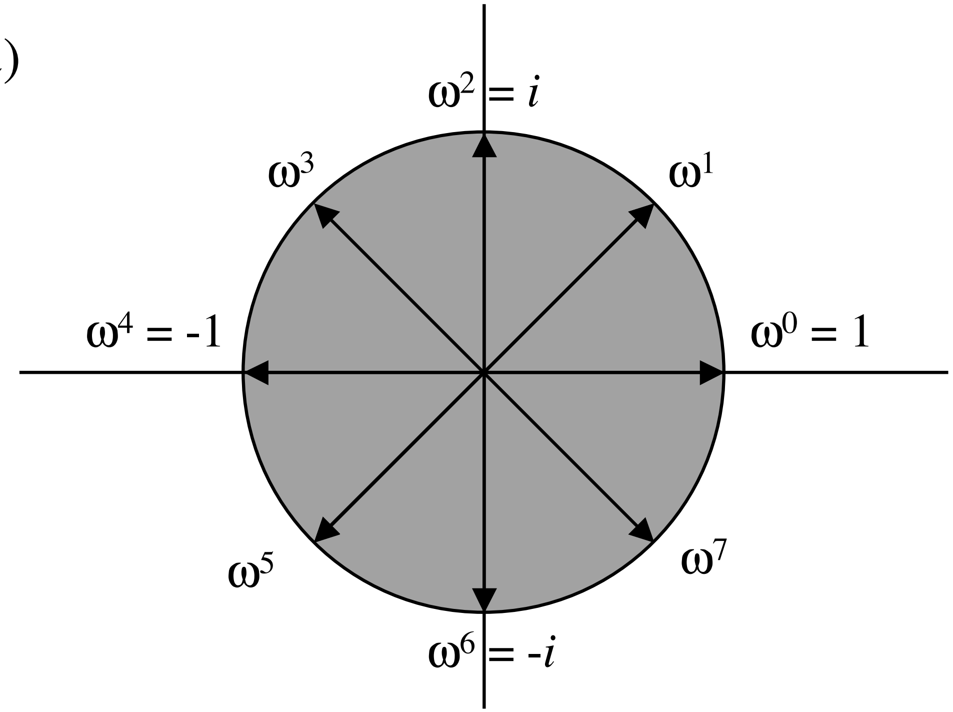
Eksempel 2

Det komplekse tal $e^{2\pi i/n}$ er en primitiv n'te enhedsrod, hvor

$$i = \sqrt{-1}$$

$$e^{2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$$

$n = 8$



Egenskaber

Inversegenskaben: Hvis ω er en primitiv n'te enhedsrod, så er $\omega^{-1} = \omega^{n-1}$

Bevis: $\omega\omega^{n-1} = \omega^{n} = 1$

Annuleringsegenskaben: For $-n<k<n$ og $k \neq 0$ er $\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} = 0$

Bevis:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} = \frac{(\omega^k)^n - 1}{\omega^k - 1} = \frac{(\omega^n)^k - 1}{\omega^k - 1} = \frac{(1)^k - 1}{\omega^k - 1} = \frac{1-1}{\omega^k - 1} = 0$$

Flere egenskaber

Reduktionsegenskaben: Hvis ω er en primitiv $2n$'te enhedsrod,
så er ω^2 en primitiv n'te enhedsrod

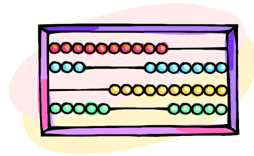
Bevis: Hvis $1,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^{2n-1}$ er indbyrdes forskellige,
så er $1, \omega^2, (\omega^2)^2, \ldots, (\omega^2)^{n-1}$ også indbyrdes forskellige

Reflektionsegenskaben: Hvis n er lige, er $\omega^{n/2} = -1$

Bevis: Ved brug af annuleringsegenskaben for $k = n/2$ fås

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{(n/2)j} = \omega^0 + \omega^{n/2} + \omega^0 + \omega^{n/2} + \cdots + \omega^0 + \omega^{n/2} = (n/2)(1+\omega^{n/2})$$

Følgesætning: For n lige gælder $\omega^{k+n/2} = -\omega^k$



Den diskrete Fourier-transformation

Givet koefficienterne $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ for et $(n$-1)'te grad polynomium $p(x)$

Den **diskrete Fourier-transformation** (DFT) evaluerer p for værdierne 1, ω, ω^2, …, ω^{n-1}

Vi beregner $(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$, hvor $y_j = p(\omega^j)$, d.v.s.

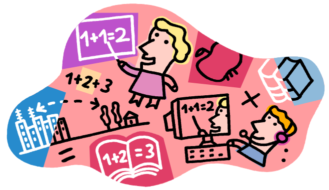
$$y_j = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \omega^{ij}$$

På matrix-form: $y = Fa$, hvor $F[i,j] = \omega^{ij}$

Den **inverse diskrete Fourier-transformation** bestemmer koefficienterne for et $(n$-1)'te grad polynomium givet dets værdier for 1, ω, ω^2, …, ω^{n-1}

På matrix form: $a = F^{-1}y$, hvor $F^{-1}[i,j] = \omega^{-ij}/n$

Korrekthed af den inverse DFT



DFT og den inverse DFT er faktisk inverse operationer

Bevis: Lad $A=F^{-1}F$. Vi ønsker at vise, at $A = I$, hvor

$$A[i, j] = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-ki}\omega^{kj}$$

Hvis $i = j$, har vi

$$A[i,i] = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-ki}\omega^{ki} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{0} = \frac{1}{n}n = 1$$

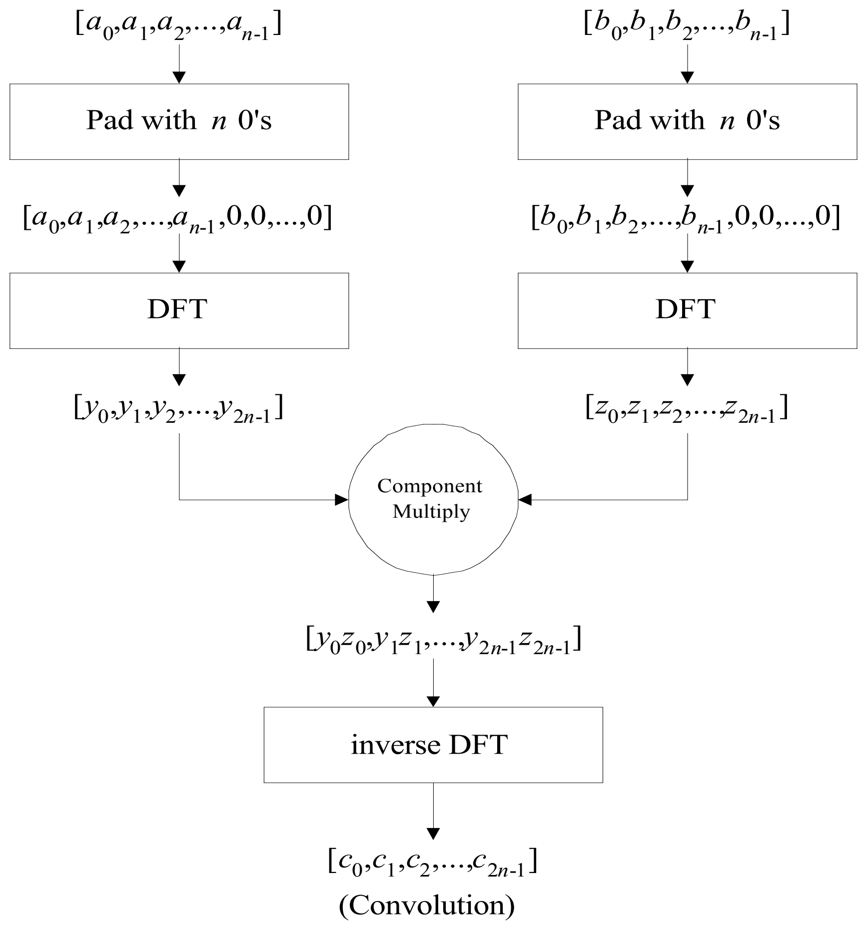
Hvis i og j er forskellige, har vi

$$A[i,j] = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{(j-i)k} = 0$$ (ved brug af annuleringsegenskaben)

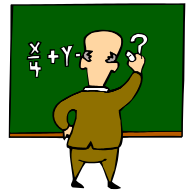
Foldning

DFT og den inverse DFT kan bruges til at multiplicere to polynomier

Derfor kan vi bestemme koefficienterne for produkt-polynomiet hurtigt, hvis vi kan bestemme DFT og dens inverse hurtigt



Den hurtige Fourier-transformation



Den **hurtige Fourier-transformation** (FFT) er en effektiv algoritme til beregning af DFT

FFT er baseret på paradigmet del-og hersk:

Hvis n er lige, opdeles polynomiet

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

i polynomierne

$$\begin{aligned} p^{\text{even}}(x) &= a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \cdots + a_{n-2} x^{n/2-1} \\ p^{\text{odd}}(x) &= a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n/2-1} \end{aligned}$$

Vi har da, at

$$p(x) = p^{\text{even}}(x^2) + x p^{\text{odd}}(x^2).$$

FFT-algoritmen

Algorithm $\mathsf{FFT}(\mathbf{a},\omega)$:

Input: An n-length coefficient vector $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$ and a primitive nth root of unity ω, where n is a power of 2

Output: A vector $\mathbf{y}$ of values of the polynomial for $\mathbf{a}$ at the nth roots of unity

if $n = 1$ **then**
  return $\mathbf{y} = \mathbf{a}$.
$x \leftarrow \omega^0$ {x will store powers of ω, so initially $x = 1$.}
{Divide Step, which separates even and odd indices}
$\mathbf{a}^{\text{even}} \leftarrow [a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{n-2}]$
$\mathbf{a}^{\text{odd}} \leftarrow [a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{n-1}]$
{Recursive Calls, with ω^2 as $(n/2)$th root of unity, by the reduction property}
$\mathbf{y}^{\text{even}} \leftarrow \mathsf{FFT}(\mathbf{a}^{\text{even}}, \omega^2)$
$\mathbf{y}^{\text{odd}} \leftarrow \mathsf{FFT}(\mathbf{a}^{\text{odd}}, \omega^2)$
{Combine Step, using $x = \omega^i$}
for $i \leftarrow 0$ to $n/2 - 1$ **do**
  $y_i \leftarrow y_i^{\text{even}} + x \cdot y_i^{\text{odd}}$
  $y_{i+n/2} \leftarrow y_i^{\text{even}} - x \cdot y_i^{\text{odd}}$ {Uses reflective property}
  $x \leftarrow x \cdot \omega$
return $\mathbf{y}$

Køretiden er $O(n \log n)$

Multiplikation af store heltal

Givet to N-bit heltal I og J. Beregn IJ

Antag, at vi kan multiplicere ord af længde $O(\log N)$ bit i konstant tid

Find et primtal $p = cn + 1$, der kan repræsenteres i et ord

Sæt $m = \lfloor (\log p)/2 \rfloor$, således at I og J kan betragtes som vektorer af længde n bestående af m-bit ord

Bestem en primitiv enhedsrod:

Find en generator x i Z^*_p.

Så er $\omega = x^c$ en primitiv n'te enhedsrod i Z^*_p

Foretag FFT og invers FFT for at beregne foldningen C af I med J

Beregn

$$K = \sum_{i=0}^{n-1} c_i 2^{mi}$$

K er værdien af IJ

Beregningerne tager $O(n \log n)$ tid, eller $O(N)$, hvis n vælges, så n er $O(N / \log N)$

Eksperimentelle resultater

Log-log skala viser at sædvanlig multiplikation kører i kvadratisk tid, mens FFT-versioner kører i næsten lineær tid.