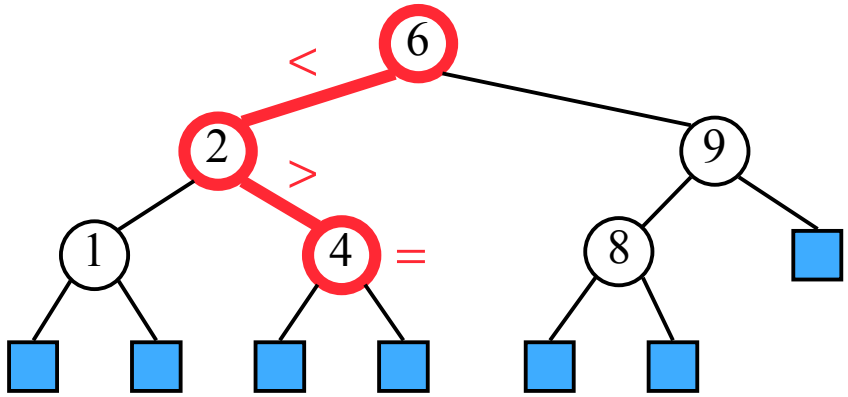
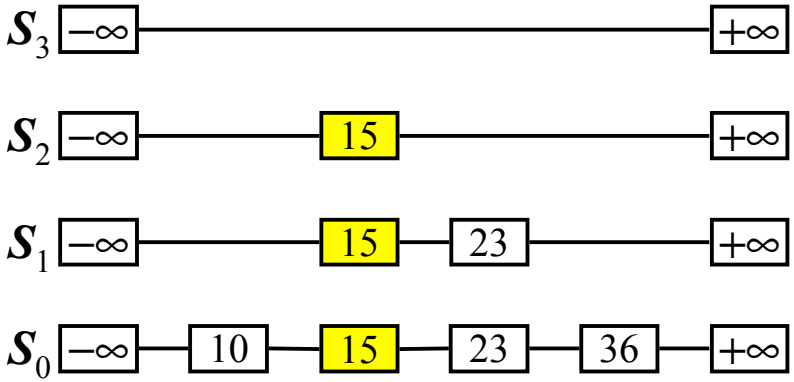
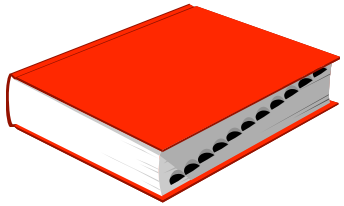
# Søgning

# Binære søgetræer og skiplister



# Ordbog ADT (Dictionary)



En **ordbog** lagrer en samling af emner, der kan søges i

Hvert emne er et par (nøgle, element)

De centrale operationer for en ordbog er søgning, indsættelse og fjernelse af emner

Anvendelser:

- Adressebog
- Kontokort-autorisering
- Afbildning fra værtsnavne (f.eks. akira.ruc.dk) til internetadresser (f.eks. 130.225.220.8)

Metoder:

**findElement**(k):
Hvis ordbogen indeholder et emne med nøgle k, så returneres dets element. Ellers returneres det specielle element NO_SUCH_KEY

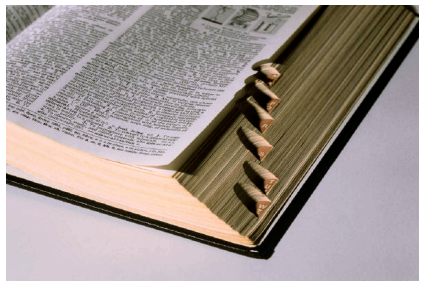
**insertItem**(k, o):
Indsætter emnet (k, o) i ordbogen

**removeElement**(k):
Hvis ordbogen har et emne med nøglen k, så fjernes det, og dets element returneres. Ellers returneres det specielle element NO_SUCH_KEY

**size**(), **isEmpty**()

**keys**(), **elements**()

# Ordnede ordbøger



Nøglerne antages at opfylde en total ordningsrelation

Nye operationer:

**closestKeyBefore**(k)
**closestElemBefore**(k)
**closestKeyAfter**(k)
**closestElemAfter**(k)

hvor k er en nøgle

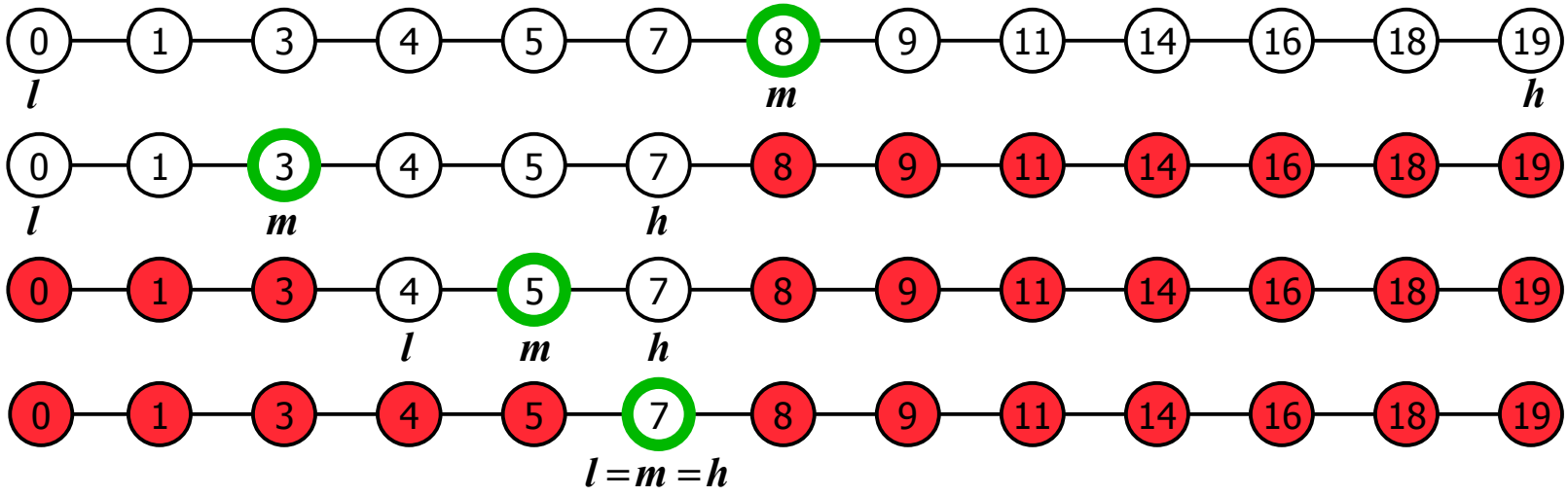
# Binær søgning

Binær søgning udfører operationen **findElement**(k) på en ordbog implementeret ved en array-baseret sekvens, der er **sorteret** i forhold til nøglerne

I hvert skridt halveres antallet af kandidat-emner

Algoritmen terminerer efter $O(\log n)$ skridt

Eksempel: **findElement**(7)



# Opslagstabel

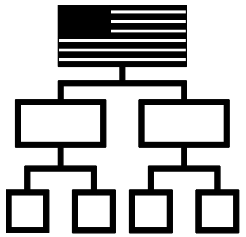
En **opslagtabel** er en ordbog, der er implementeret ved hjælp af en sorteret sekvens
Emnerne lagres i en array-baseret sekvens, der holdes sorteret efter nøglerne
Der benyttes et comparator-objekt til sammenligning af nøgler

Effektivitet:

- **findElement** tager $O(\log n)$ tid ved brug af binær søgning
- **insertItem** tager $O(n)$ tid, da vi værste tilfælde skal parallelforskyde $n-1$ emner for at gøre plads til det nye emne
- **removeElement** tager $O(n)$ tid, da vi i værste tilfælde skal parallelforskyde $n-1$ emner for at placere tabellens emner kompakt i tabellen

En opslagtabel er kun effektiv for små ordbøger, eller for hvilke søgning er den mest almindelige operation, mens indsættelse og sletning er sjældne operationer (f.eks. autorisering af kontokort)

# Binært søgetræ

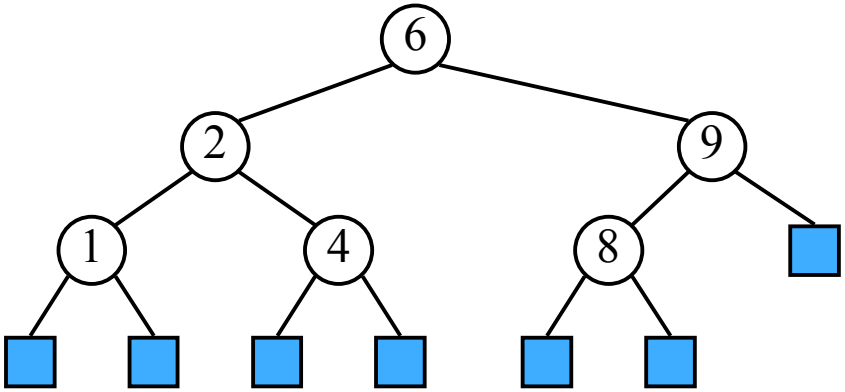


Et **binært søgetræ** er et binært træ, der indeholder nøgler (eller nøgle-element-par) og opfylder følgende betingelse:

> Lad $u$, $v$ og $w$ være tre knuder, hvor $u$ er i $v$'s venstre undertræ, og $w$ er i $v$'s højre undertræ. Vi har, at
>
> $$key(u) \leq key(v) \leq key(w)$$

De eksterne knuder indeholder ikke emner

En inorder-traversering af et binært søgetæ besøger knuderne i stigende orden



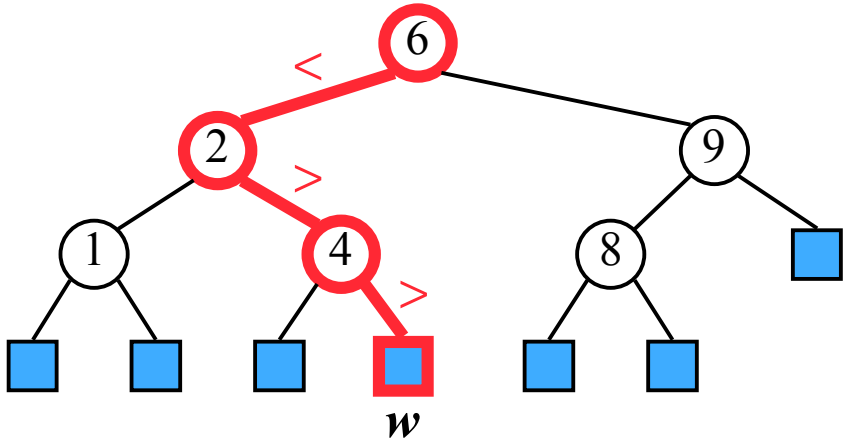
# Indsættelse

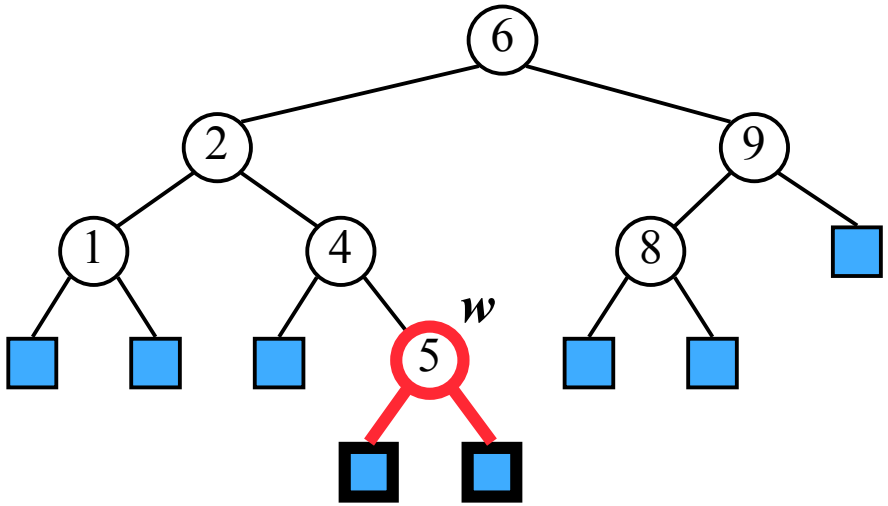
For at udføre operationen **insertItem**(***k***, ***o***) søges efter nøglen ***k***

Antag at ***k*** ikke allerede findes i træet, og lad ***w*** være det blad, der nås ved søgningen

Så indsættes ***k*** i knuden ***w***, og knuden omdannes til en intern knude

Eksempel: indsættelse af 5



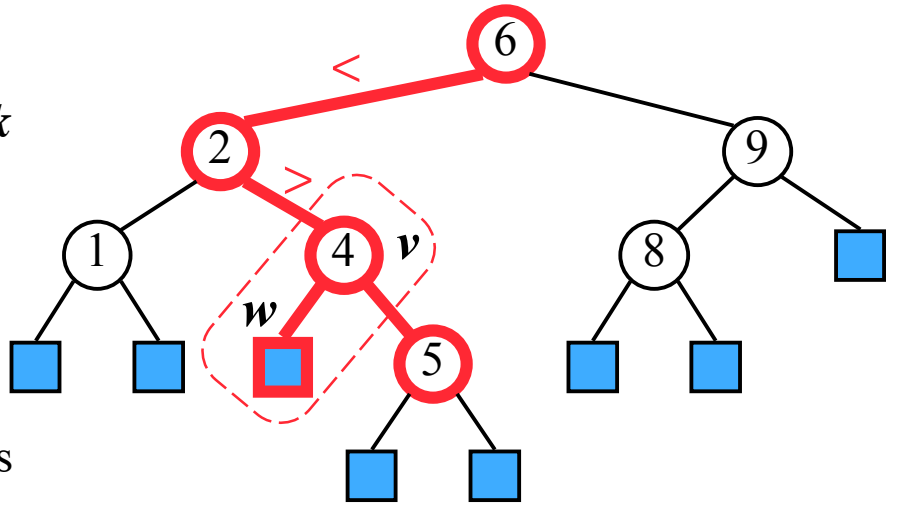
# Fjernelse

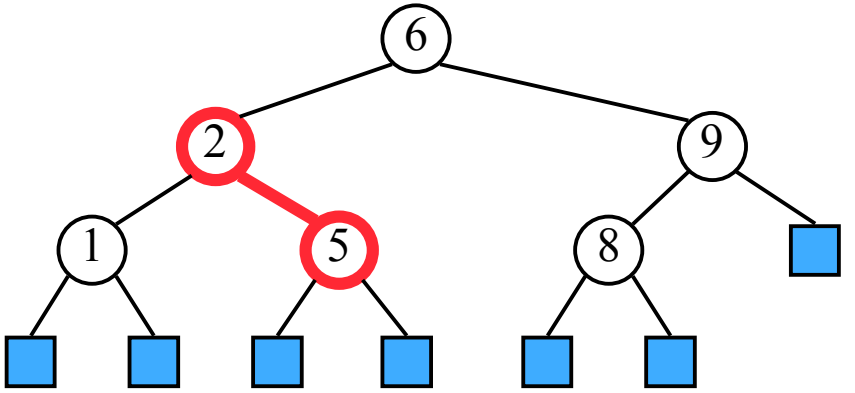
For at udføre operationen **removeElement**(***k***) søges efter nøglen ***k***

Antag at ***k*** er i træet, og lad ***v*** være den knude, der indeholder ***k***

Hvis ***v*** har et blad ***w*** som barn, så fjernes ***v*** og ***w*** fra træet

Eksempel: fjernelse af 4



# Fjernelse (fortsat)

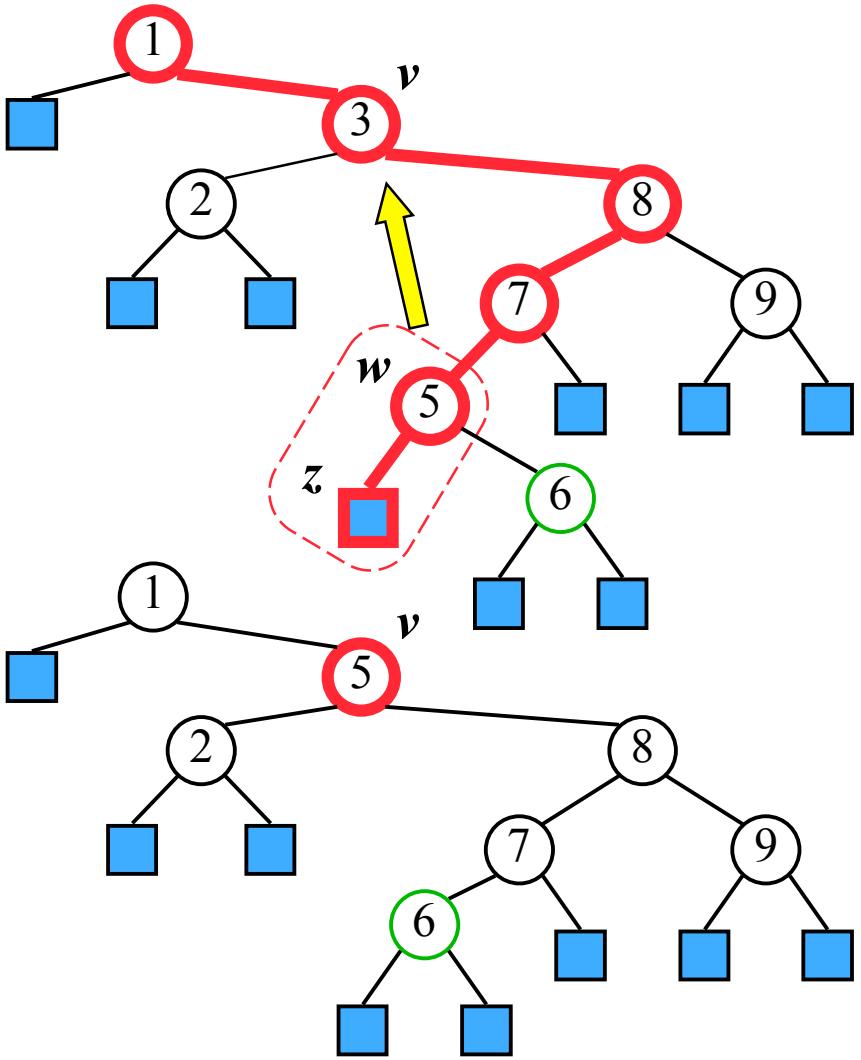
Betragt det tilfælde, hvor nøglen ***k***, der skal fjernes findes i en knude ***v***, hvis børn begge er interne knuder

Find den interne knude ***w***, som besøges efter ***v*** in ved en inorder-traversering

Kopier ***key***(***w***) til knuden ***v***

Fjern ***w*** og dennes venstre barn, ***z*** (som må være et blad)

Eksempel: fjernelse af 3



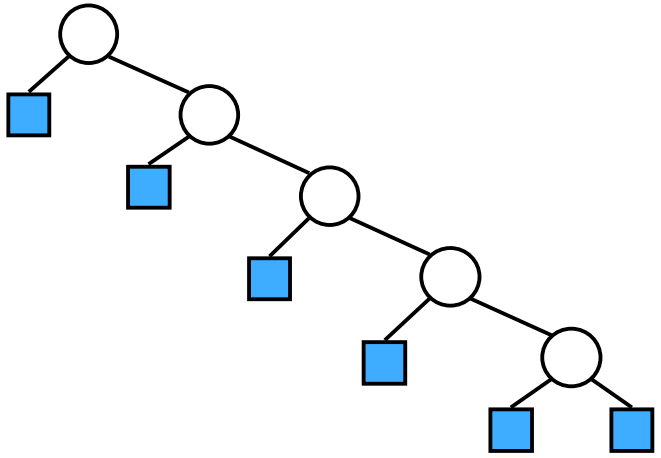
# Effektivitet

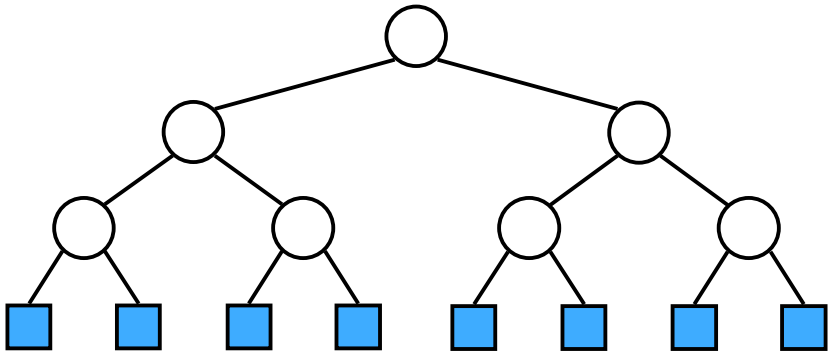
Betragt en ordbog med ***n*** emner, der er implementeret ved hjælp af et binært søgetræ med højden ***h***

Pladsforbruget er ***O***(***n***)

Metoderne **findElement**, **insertItem** og **removeElement** tager ***O***(***h***) tid

Højden ***h*** er ***O***(***n***) i værste tilfælde, og ***O***(log ***n***) i bedste tilfælde





# Det gennemsnitlige tilfælde


Hvis ***n*** emner indsættes i tilfældig rækkefølge i et fra starten tomt binært søgetræ, vil længden af søgevejen i det frembragte træ i gennemsnit være $1.39\log_2 \boldsymbol{n}$

I praksis er udførelsestiden for de tre grundoperationer $\boldsymbol{O}(\log \boldsymbol{n})$ for tilfældigt input. Det er dog endnu ikke blevet påvist analytisk

# Balancerede søgetræer

**Balancering** er en teknik, der **garanterer**, at de værste tilfælde ved søgning ikke forekommer

Ideen er at omorganisere træet under indsættelse og sletning, så det bliver fuldt (eller næsten fuldt)

Et fuldt træ siges at være i **perfekt balance**. For enhver knude gælder nemlig, at antallet af knuder i dens venstre undertræ er lig med antallet af knuder i dens højre undertræ

I det følgende præsenteres en række datastrukturer, der **garanterer** $O(\log n)$ kompleksitet for såvel søgning, indsættelse som sletning

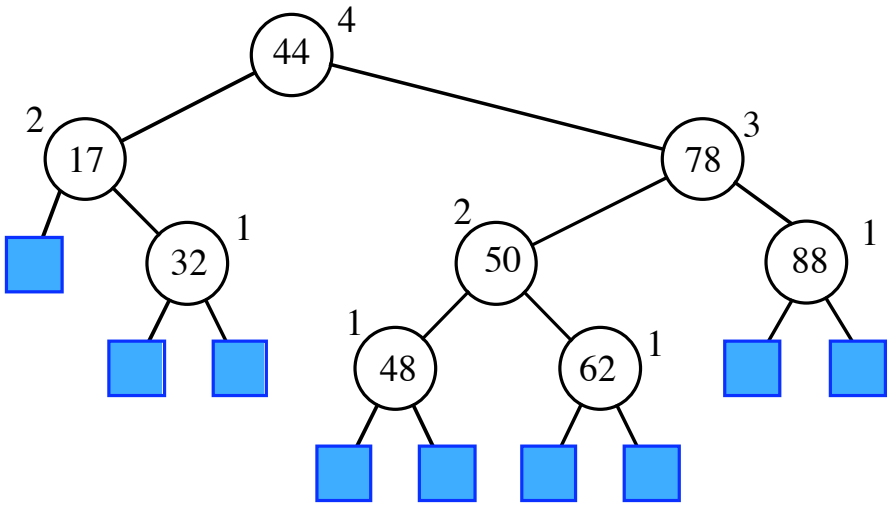
# AVL-træer

(**A**delson-**V**elskii og **L**andis, 1962)

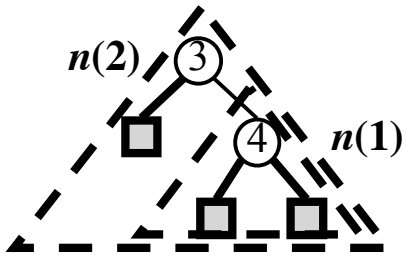
**AVL-træer er balancerede**

Et AVL-træ er et binært søgetræ, hvor det for enhver intern knude gælder, at højderne af dens børn højst afviger med 1

Eksempel på et AVL-træ
Højderne er angivet ved siden af knuderne



# Højden af et AVL-træ




**Sætning**: Højden af et AVL-træ med $n$ nøgler er $O(\log n)$

**Bevis**:

Lad $n(h)$ betegne det minimale antal interne knuder i et AVL-træ med højden $h$

Det er let at se, at $n(1) = 1$ og $n(2) = 2$

For $h > 2$ indeholder et AVL-træ med højden $h$ og med et minimalt antal interne knuder

- roden
- et AVL-træ med højden $h$-1
- et AVL-træ med højden $h$-2

Derfor gælder $n(h) = 1 + n(h\text{-}1) + n(h\text{-}2)$

Da $n(h\text{-}1) > n(h\text{-}2)$, fås $n(h) > 2n(h\text{-}2)$, og derfor

$n(h) > 4n(h\text{-}4)$, $n(h) > 8n(h\text{-}6)$, ...., $n(h) > 2^i n(h\text{-}2i)$

Ved løsning med basistilfældet, $n(1) = 1$, fås $n(h) > 2^{h/2-1}$

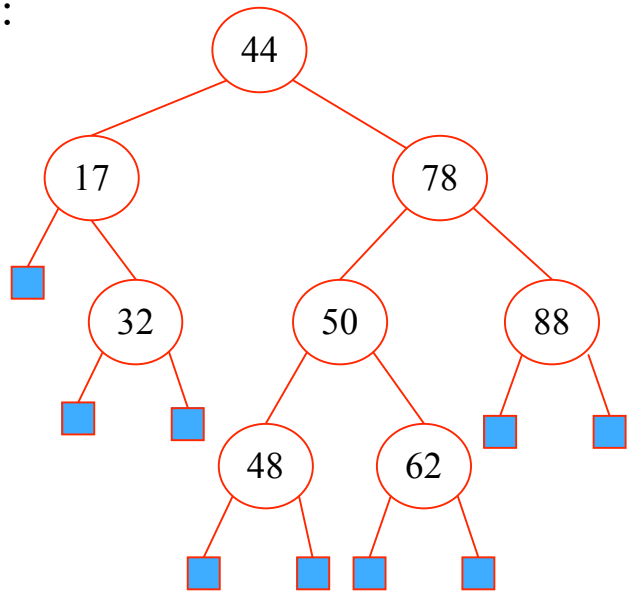
Ved at tage logaritmen på begge sider af ulighedstegnet fås $h < 2\log n(h) + 2$

Derfor er højden af et AVL-træ $O(\log n)$

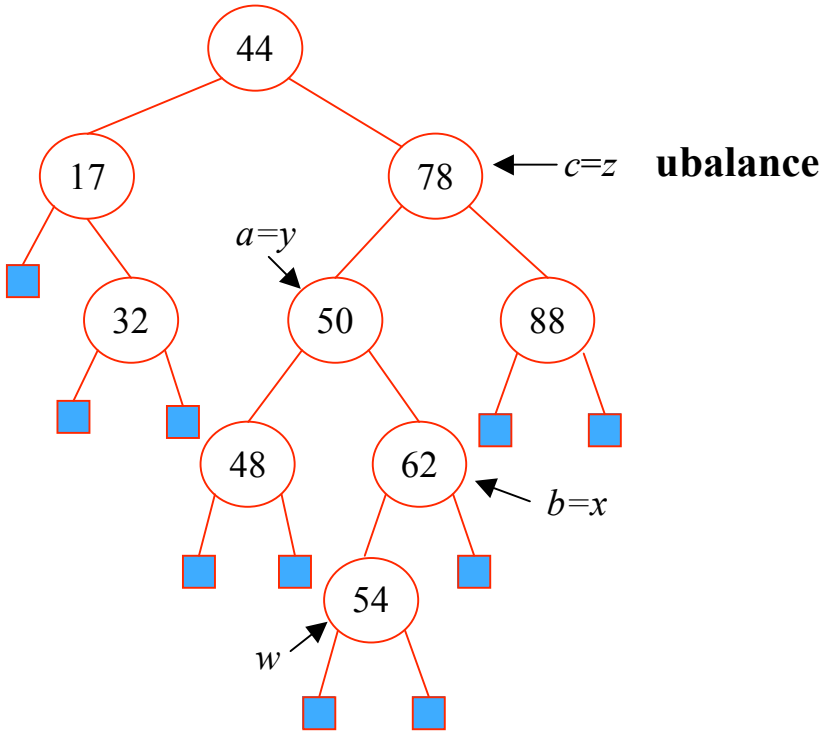
# Indsættelse i et AVL-træ

Indsættelse sker i et binært søgetræ
Sker altid ved at udvide en ekstern knude

Eksempel:



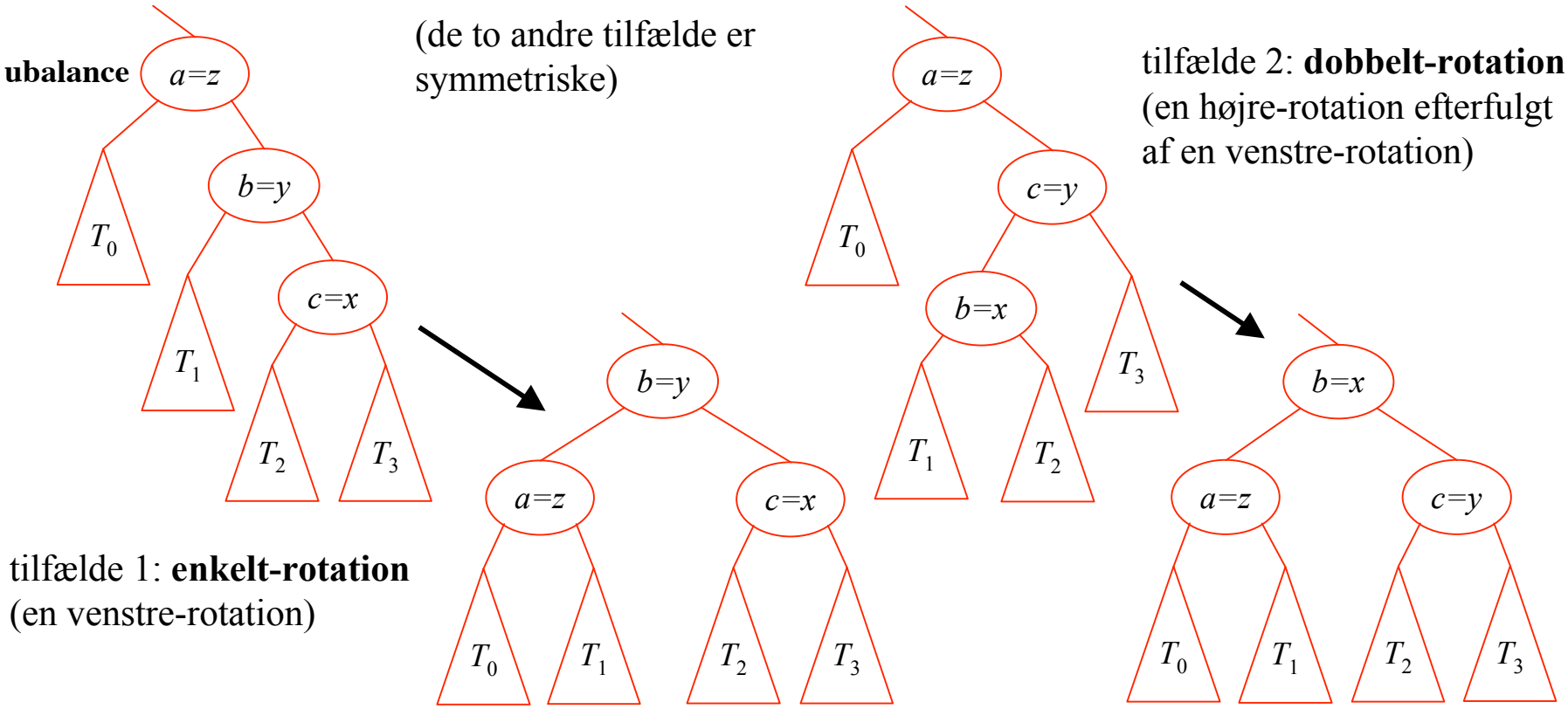

inden indsættelse af 54



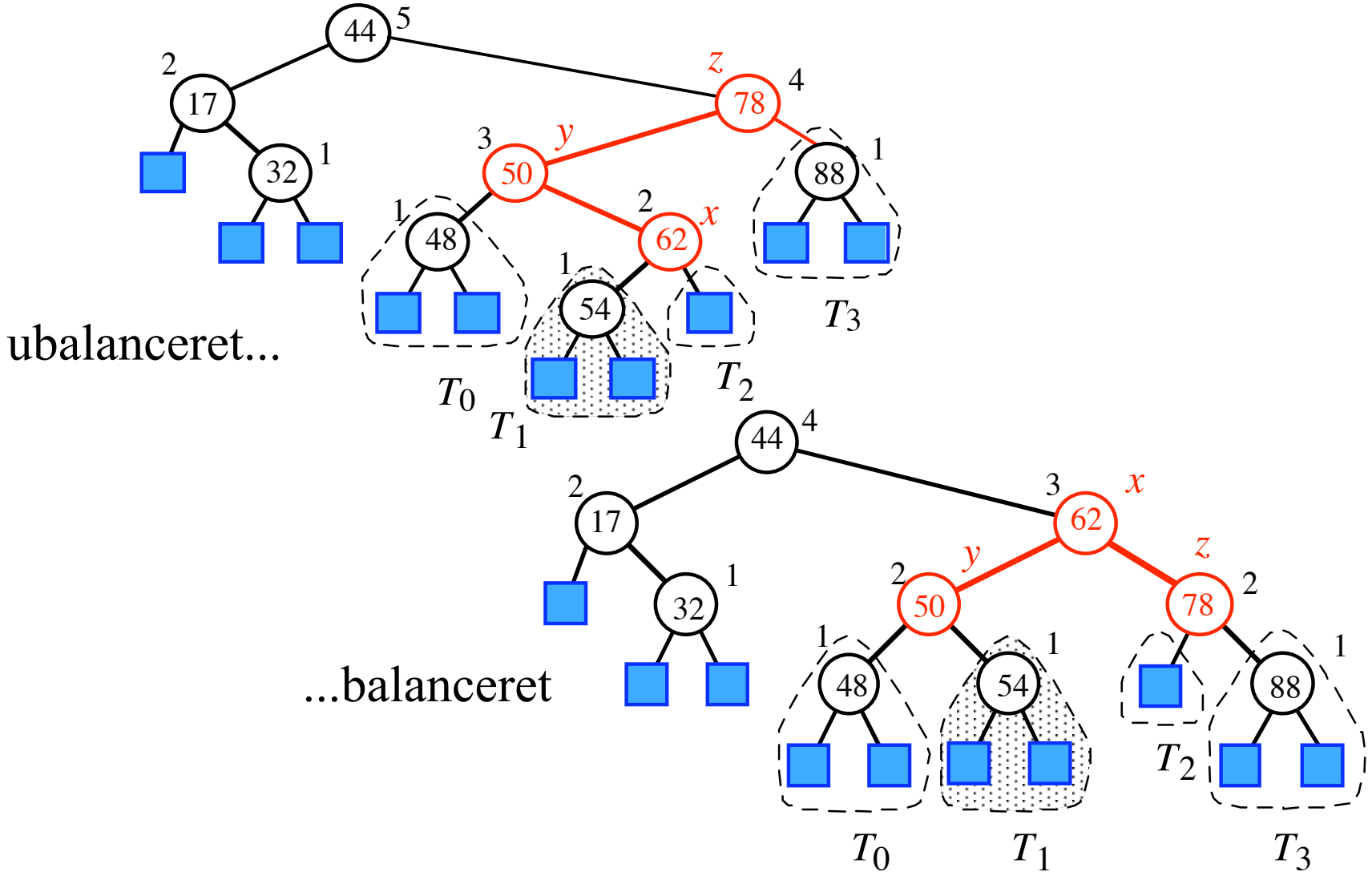

efter indsættelse

# Omstrukturering

Lad (***a***, ***b***, ***c***) være en inorder-opremsning af ***x***, ***y***, ***z***
Udfør de **rotationer**, der skal til for at gøre ***b*** til den øverste knude af de tre knuder



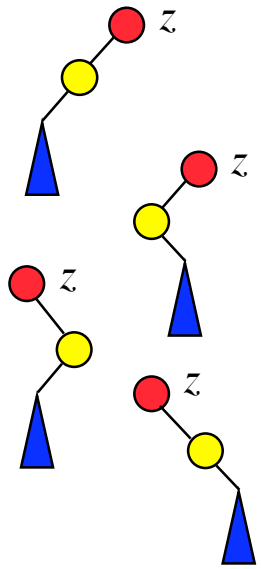
# Eksempel på indsættelse



# Indsættelse i AVL-træ
# 4 tilfælde

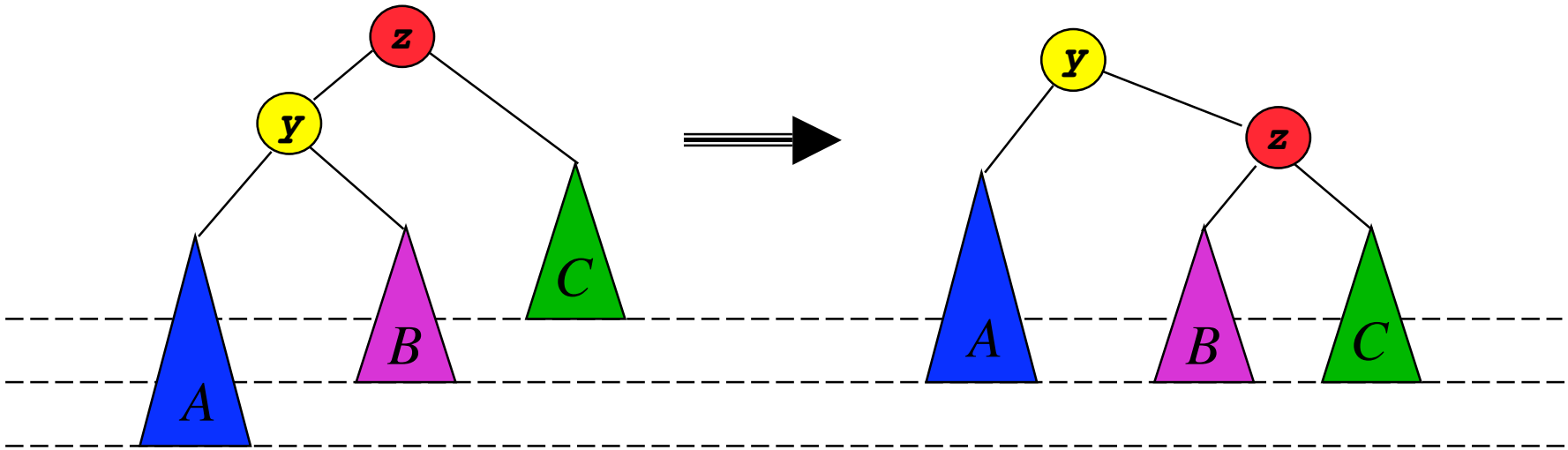
Ved indsættelse i et af $z$'s undertræer er der 4 mulige tilfælde:

1. Indsættelsen sker i det *venstre* undertræ af $z$'s *venstre* søn.
2. Indsættelsen sker i det *højre* undertræ af $z$'s *venstre* søn.
3. Indsættelsen sker i det *venstre* undertræ af $z$'s *højre* søn.
4. Indsættelsen sker i det *højre* undertræ af $z$'s *højre* søn.



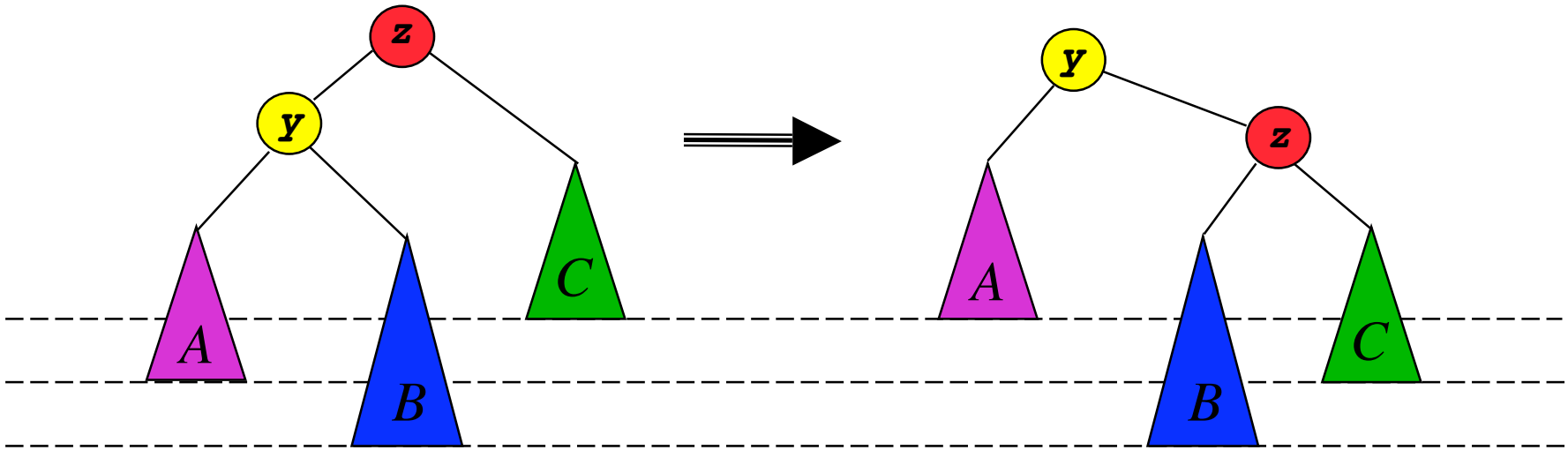

Tilfælde 1 og 4 er symmetriske.
Tilfælde 2 og 3 er symmetriske.

# Tilfælde 1




En højre-rotation genskaber balancen

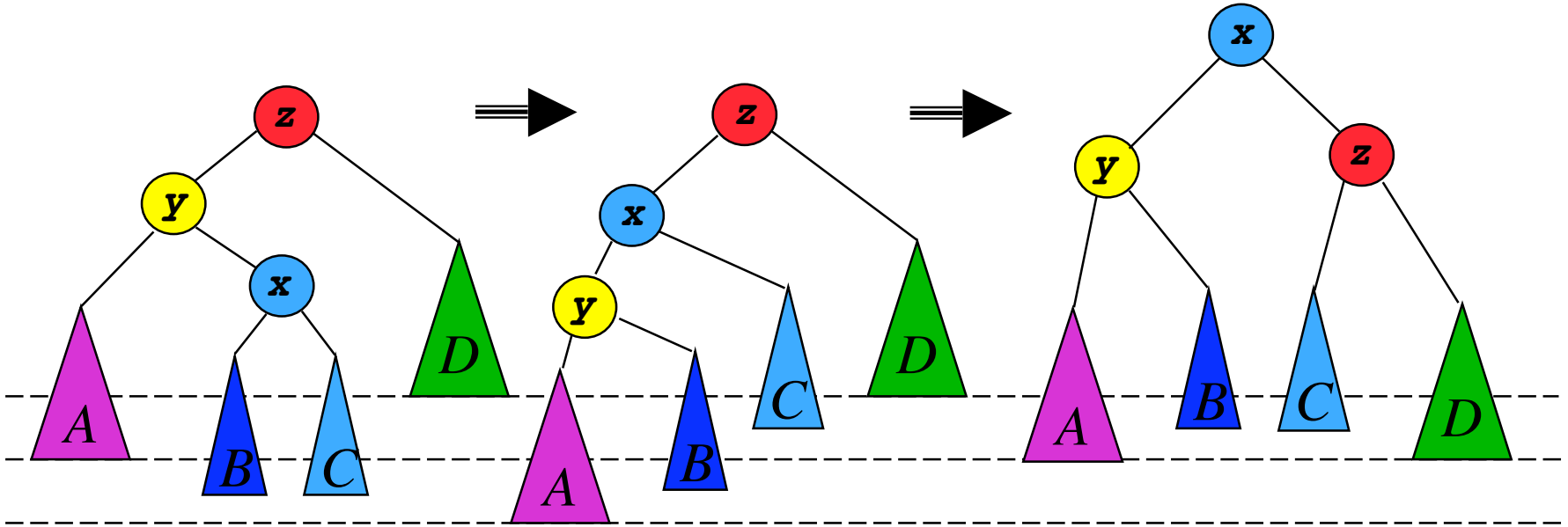
# Tilfælde 2




En højre-rotation genskaber **ikke** balancen

# Tilfælde 2

(fortsat)

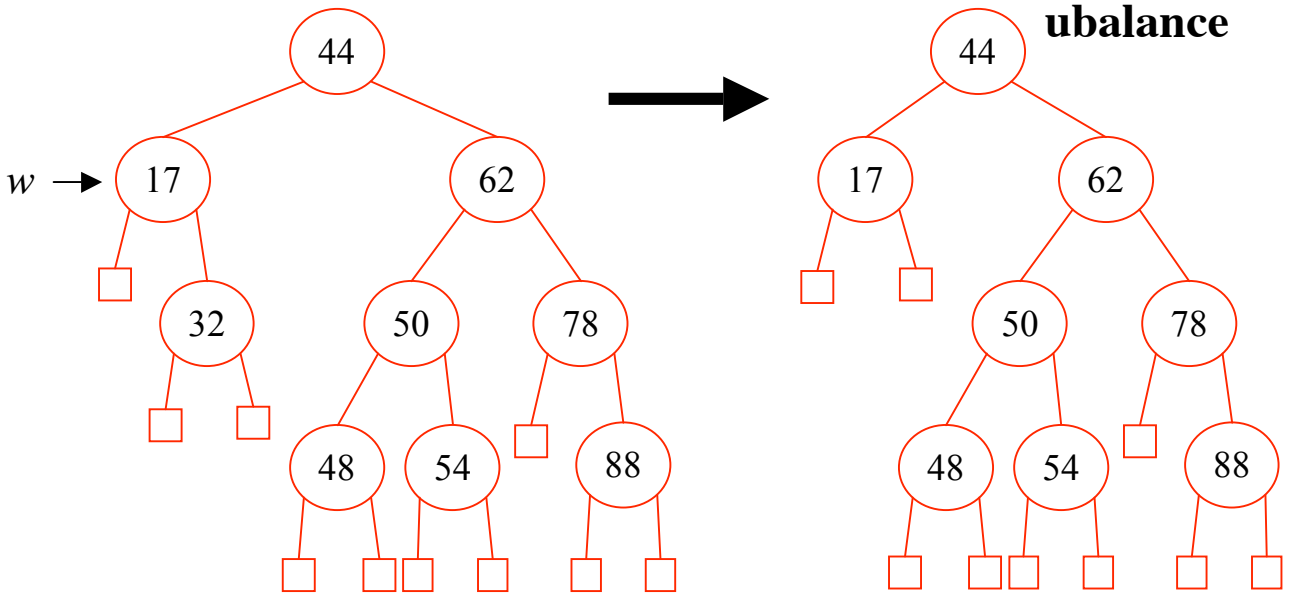



En venstre-højre-dobbeltrotation genskaber balancen

# Fjernelse fra et AVL-træ

Fjernelse starter som i et binært søgetræ
Forælderen ***w*** til en fjernet knude og dennes forfædre kan komme ud af balance

Eksempel:

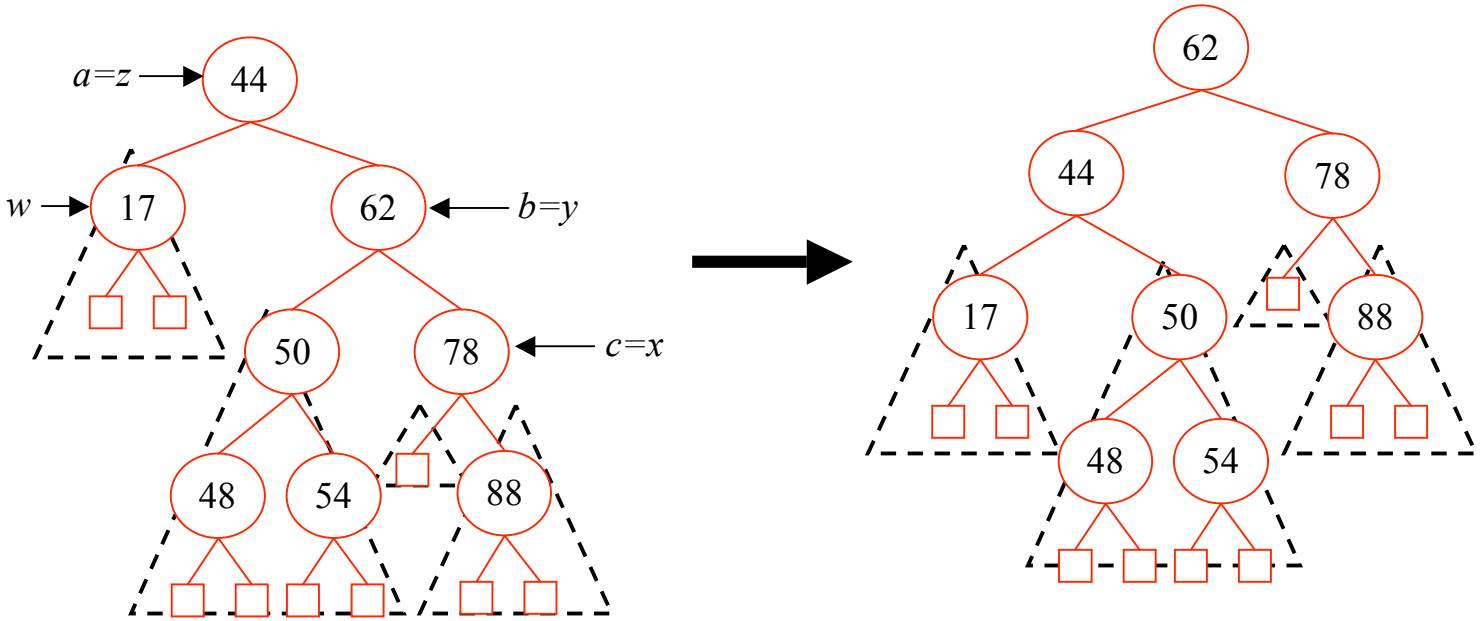



inden fjernelse af 32 efter fjernelse

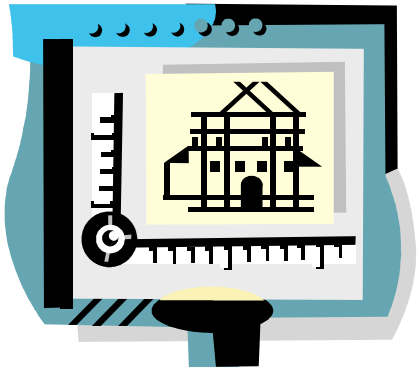
# Omstrukturering efter fjernelse

Lad ***z*** være den første ubalancerede knude, der mødes, når der gås op igennem træet fra ***w***. Lad desuden ***y*** være det barn af ***z***, der har størst højde, og lad ***x*** være det barn af ***y***, der har størst højde

Balancen i ***z*** kan genskabes (med en enkelt- eller dobbelt-rotation)
Men dermed kan balancen i en anden knude højere oppe i træet blive ødelagt
Vi fortsætter derfor på samme måde, indtil roden nås



# Køretid for AVL-træer



Omstrukturering (rotation) tager $\boldsymbol{O}(1)$
- ved brug af et hægtet binært træ

Søgning tager $\boldsymbol{O}(\log n)$
- højden af træet er $\boldsymbol{O}(\log n)$
- omstrukturering er ikke nødvendig

Indsættelse tager $\boldsymbol{O}(\log n)$
- søgningen tager $\boldsymbol{O}(\log n)$
- højst 1 omstrukturering, som tager $\boldsymbol{O}(1)$

Fjernelse tager $\boldsymbol{O}(\log n)$
- søgningen tager $\boldsymbol{O}(\log n)$
- omstrukturering op igennem træet tager $\boldsymbol{O}(\log n)$

# Flervejs-søgetræer

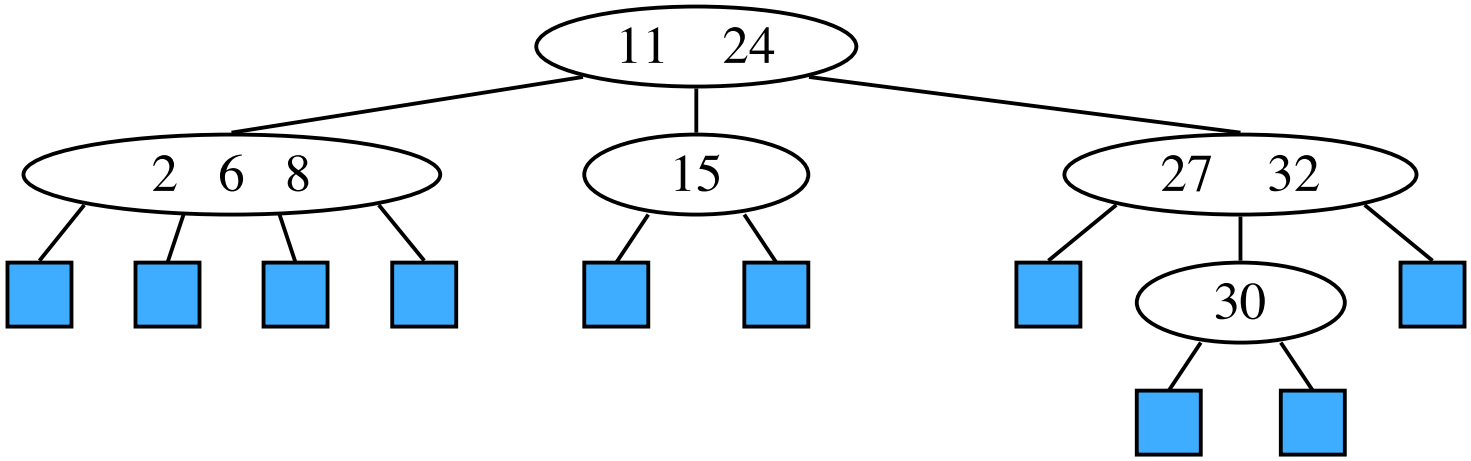
Et **flervejs-søgetræ** er et ordnet træ, hvor

Hver knude har mindst 2 børn og indeholder $d-1$ nøgle-element-par $(k_i, o_i)$, hvor $d$ er antallet af børn

For en knude med børn $v_1\ v_2\ \ldots\ v_d$ og nøglerne $k_1\ k_2\ \ldots\ k_{d-1}$ gælder

- nøglerne i undertræet med rod $v_1$ er mindre end $k_1$
- nøglerne i undertræet med rod $v_i$ ligger imellem $k_{i-1}$ og $k_i$ ($i = 2, \ldots, d-1$)
- nøglerne i undertræet med rod $v_d$ er større end $k_{d-1}$

Bladene indeholder ingen emner



# Flervejs-søgning

Svarer til søgning i et binært søgetræ

For hver interne knude med børnene $v_1\ v_2\ \ldots\ v_d$ og nøglerne $k_1\ k_2\ \ldots\ k_{d-1}$

$k = k_i$ ($i = 1, \ldots, d - 1$): søgningen terminerer succesfuldt

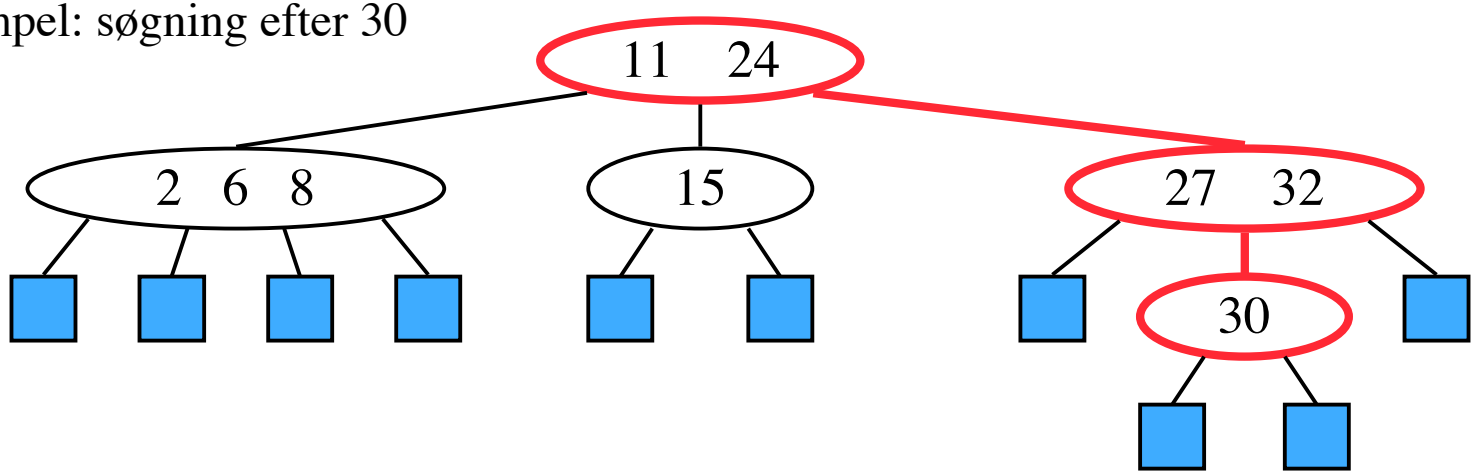
$k < k_1$: søgning fortsætter med barnet $v_1$

$k_{i-1} < k < k_i$ ($i = 2, \ldots, d - 1$): søgningen fortsætte med barnet $v_i$

$k > k_{d-1}$: søgningen fortsætter med barnet $v_d$

Hvis en ekstern knude nås, terminerer søgningen uden succes

Eksempel: søgning efter 30

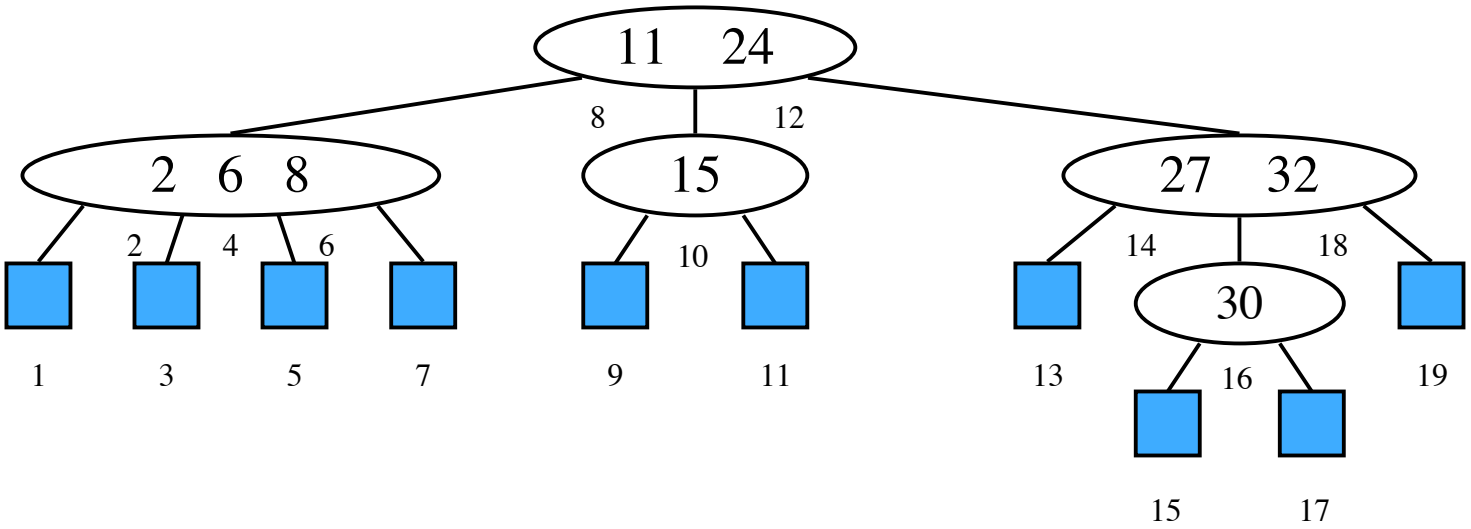


# Flervejs inorder-traversering

Vi kan udvide begrebet inorder-traversering fra binære træer til flervejs-søgetræer

Emnet ($k_i$, $o_i$) i en knude $v$ besøges imellem de rekursive kald for de to undertræer, der har børnene $v_i$ og $v_{i+1}$ som rod

En inorder-traversering for et flervejs-søgetræ besøger nøglerne i stigende orden



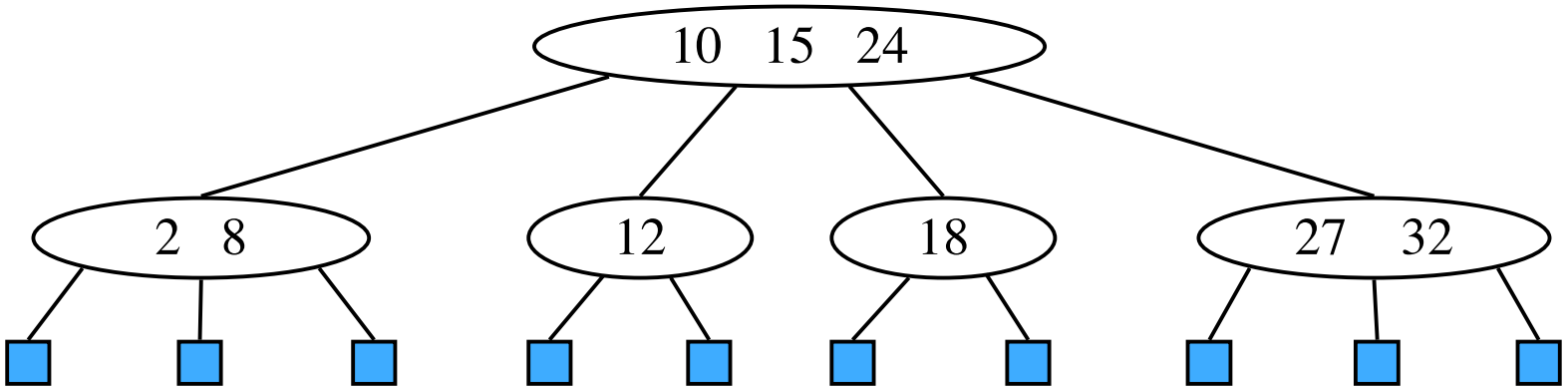
# (2,4)-træ

Et **(2,4)-træ** (også kaldet et **2-4-træ**, eller et **2-3-4-træ**) er et flervejs-træ med følgende egenskaber:

**Knude-størrelse-egenskaben**: enhver intern knude har højst 4 børn

**Dybde-egenskaben**: alle eksterne knuder har samme dybde

Afhængigt af antallet af børn, kaldes en intern knude for en **2-knude**, en **3-knude** eller en **4-knude**



# Højden af et (2,4)-træ

**Sætning**: Et (2,4)-træ med $n$ emner har højden $O(\log n)$

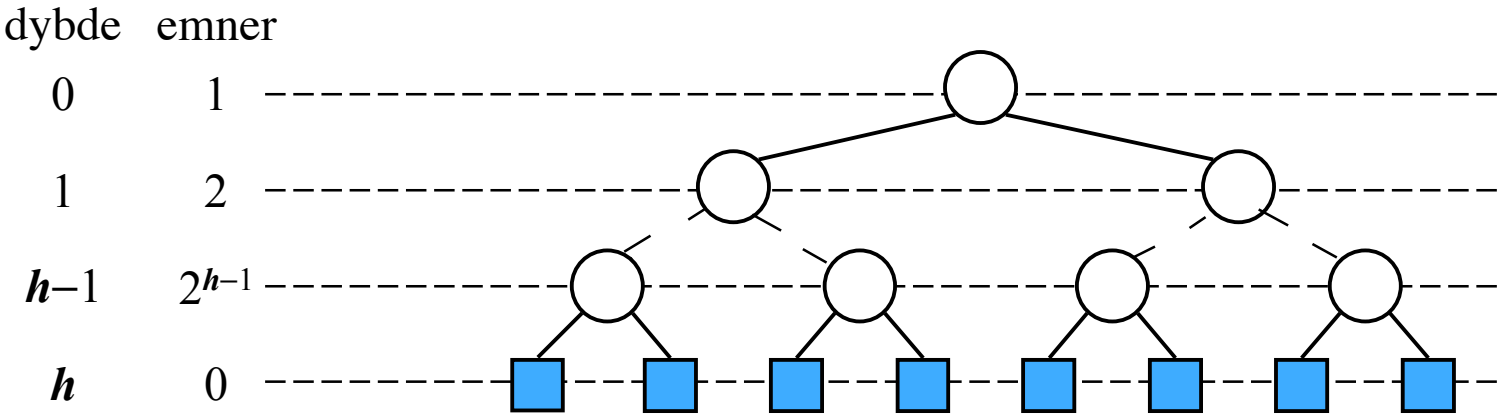
**Bevis**:

Lad $h$ være højden af et (2,4)-træ med $n$ emner

Da der er mindst $2^i$ emner på dybden $i = 0, \ldots, h-1$ og ingen emner på dybden $h$, har vi

$$n \geq 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{h-1} = 2^h - 1$$

Ved at tage logaritmen på begge sider af ulighedstegnet fås $h \leq \log(n+1)$



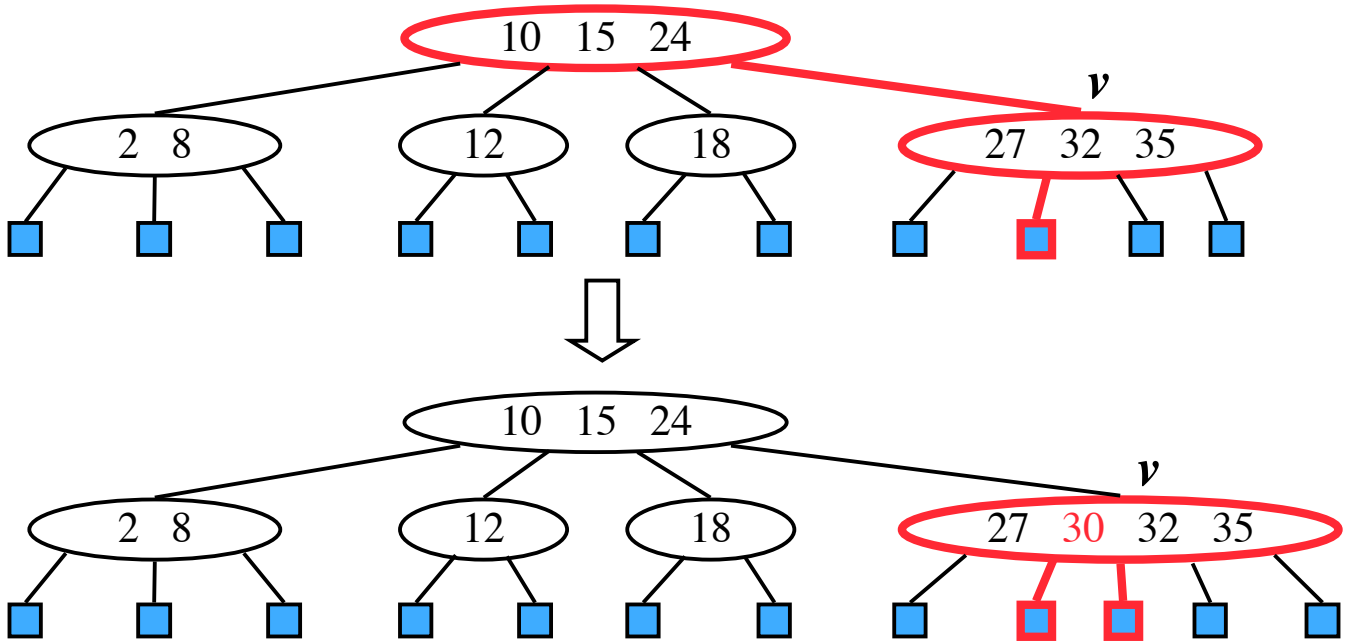
# Indsættelse

Et nyt emne (***k***, ***o***) indsættes i forælderen ***v*** til det blad, der nås ved søgning efter ***k***

Dybde-egenskaben kan bevares, men

det kan resultere i **overløb** (knude ***v*** bliver til en 5-knude)

Eksempel: indsættelse af nøgle 30 giver overløb



# Overløb og splitning

Et overløb ved en 5-knude $v$ håndteres med en splitning:

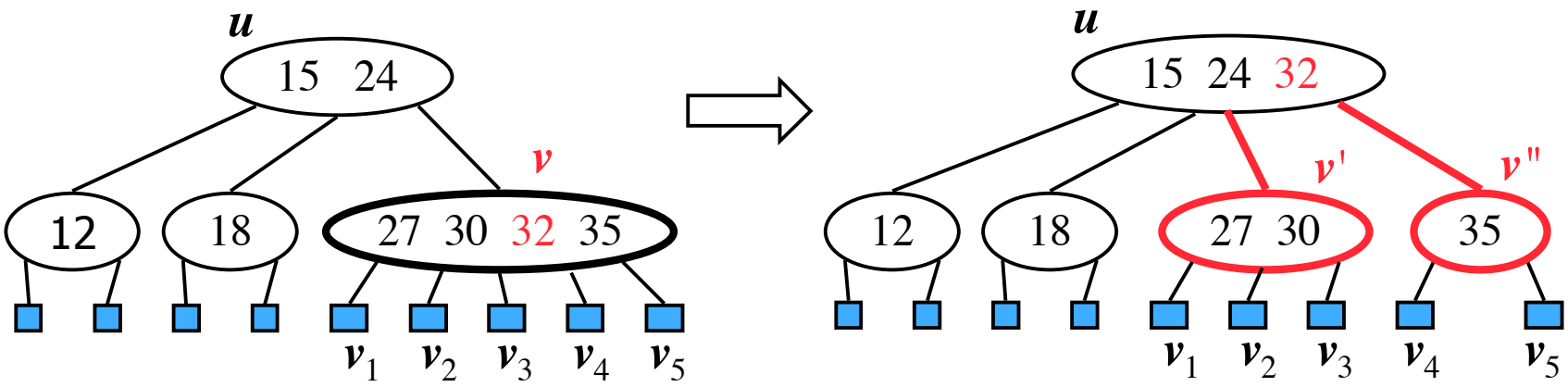
Lad $v_1 \ldots v_5$ være $v$'s børn og $k_1 \ldots k_4$ være $v$'s nøgler

Knude $v$ erstattes med knuderne $v'$ og $v''$, hvor

- $v'$ er en 3-knude med nøgler $k_1$ $k_2$ og børn $v_1$ $v_2$ $v_3$
- $v''$ er en 2-knude med nøgle $k_4$ og børn $v_4$ $v_5$

Nøglen $k_3$ indsættes i forælderen $u$ til $v$ (en ny rod kan blive skabt)

Overløbet kan brede sig til forælderen $u$



# Analyse af indsættelse

**Algorithm** *insertItem*(*k*, *o*)

1. Vi søger efter nøglen ***k*** for at lokalisere indsættelsesknuden ***v***

2. Vi tilføjer det ny emne (***k***, ***o***) til knuden ***v***

3. **while** *overflow*(*v*) **do**
   **if** *isRoot*(*v*) **then**
   skab en ny tom rod over ***v***
   $v \leftarrow$ *split*(*v*)

Lad ***T*** være et (2,4)-træ med ***n*** emner

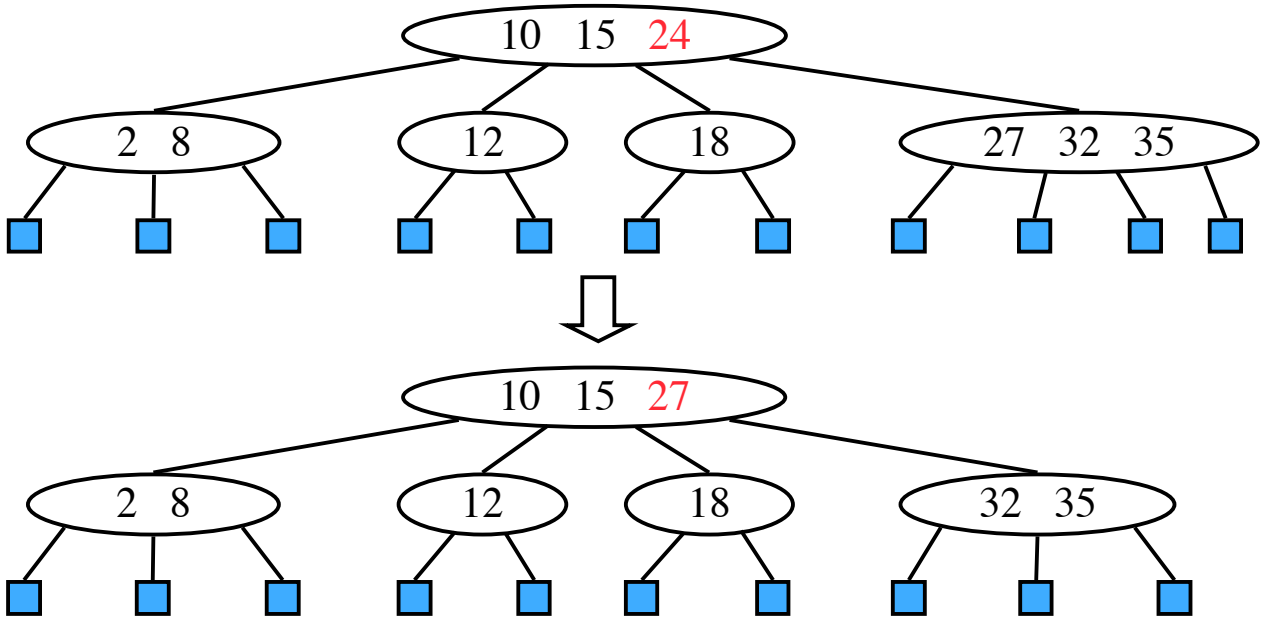
- ***T***'s højde er ***O***(log ***n***)
- Trin 1 tager ***O***(log ***n***) tid, da vi besøger ***O***(log ***n***) knuder
- Trin 2 tager ***O***(1) tid
- Trin 3 tager ***O***(log ***n***) tid, da hver splitning tager ***O***(1) tid, og vi udfører ***O***(log ***n***) splitninger

Derfor tager indsættelse i et (2,4)-træ ***O***(log ***n***) tid

# Fjernelse

Fjernelse af et emne reduceres til det tilfælde, hvor emnet findes i en knude, der kun har blade som børn. I andre tilfælde erstattes emnet med dets inorder-efterfølger (eller med dets preorder-forgænger), og sidstnævnte emne fjernes

Eksempel: for at slette nøglen 24 erstattes den med 27 (dens inorder-efterfølger)



# Underløb og fusionering

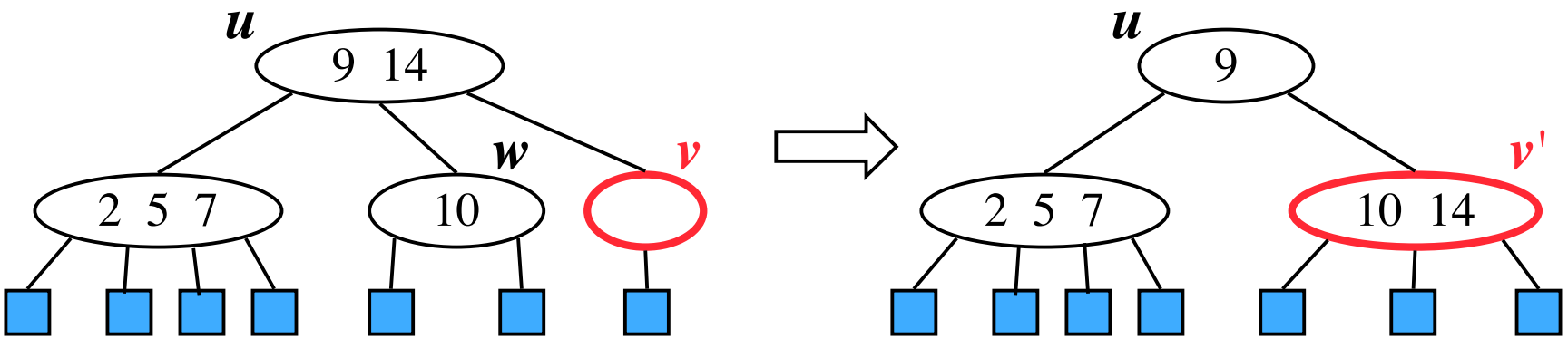
Fjernelse af et emne kan forårsage et **underløb**, hvor knuden ***v*** bliver til en 1-knude, d.v.s. en knude med et barn og ingen nøgler

For at behandle underløb betragtes to tilfælde:

**Tilfælde 1**: en tilstødende søskende er en 2-knude

**Fusionering**: vi sammensmelter ***v*** med en tilstødende søskende ***w*** og flytter et emne fra deres forælder ***u*** ned til den sammensmeltede knude ***v'***

Efter en fusionering kan underløbet brede sig til forælderen ***u***



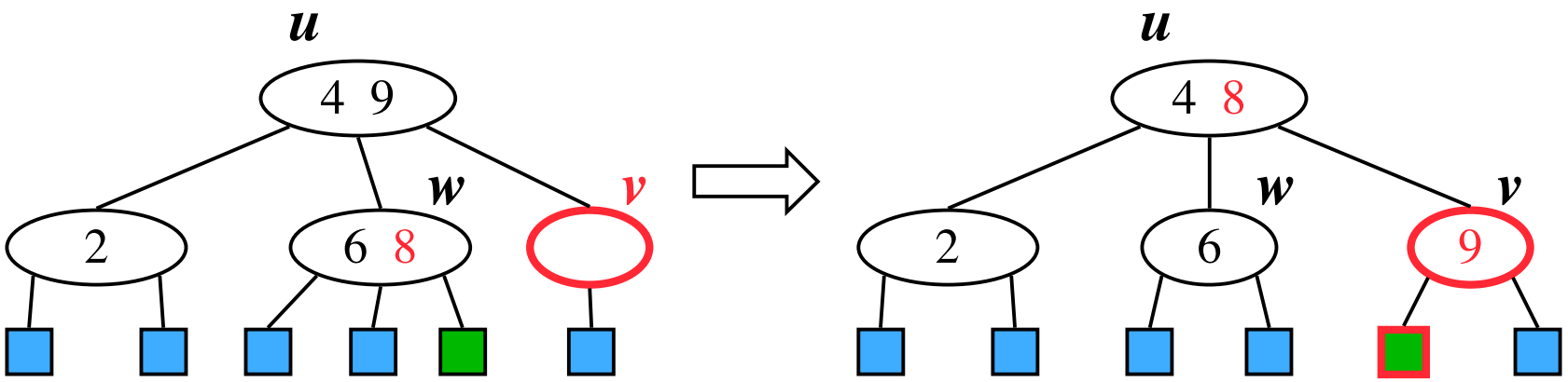
# Underløb og overførsel

**Tilfælde 2**: en tilstødende søskende, ***w***, er en 3-knude eller en 4-knude

**Overførsel**:

1. Flyt et barn af ***w*** til ***v***
2. Flyt et emne fra ***w*** to ***u***
3. Flyt et emne fra ***u*** til ***v***

Efter en overførsel kan der ikke opstå underløb



# Analyse af fjernelse

Lad $T$ være et (2,4)-træ med $n$ emner
T's højde er $O(\log n)$

Ved fjernelse

Besøges $O(\log n)$ knuder for at lokalisere den knude, hvorfra emnet skal fjernes

Vi behandler underløb ved en serie af $O(\log n)$ fusioner, efterfulgt af højst 1 overførsel

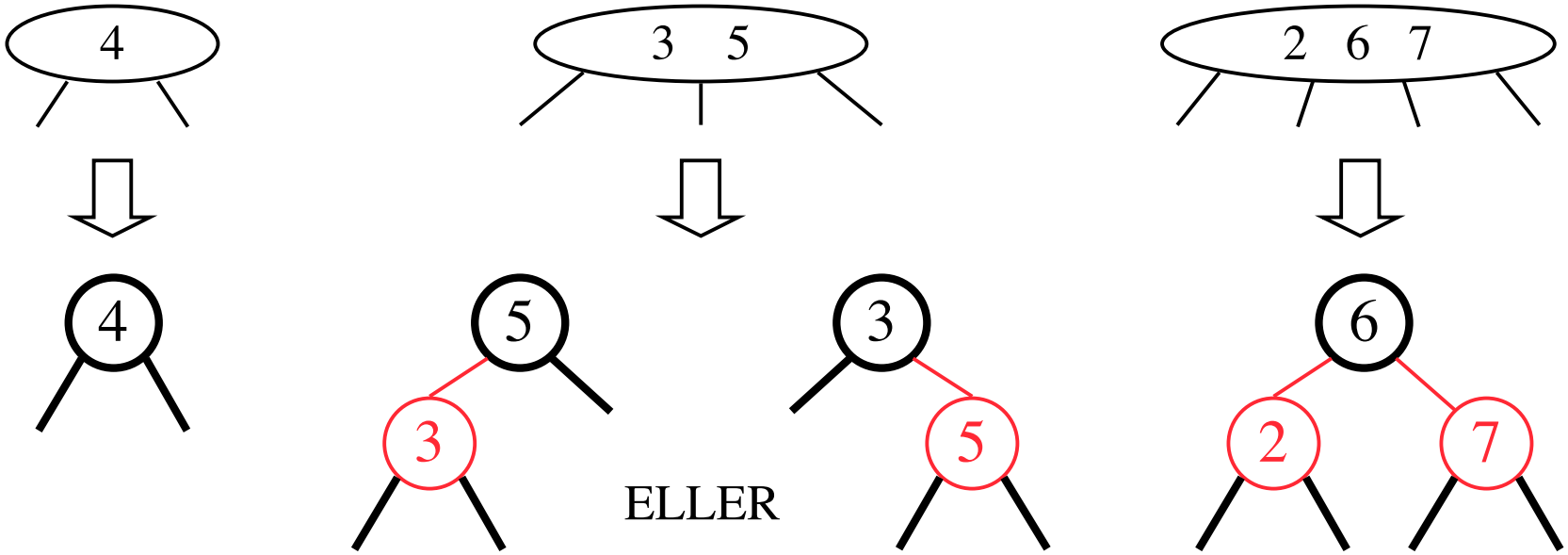
Hver fusion og overførsel tager $O(1)$ tid

Fjernelse af et emne fra et (2,4)-træ tager $O(\log n)$ tid

# Fra (2,4)- til rød-sort-træer

Et **rød-sort-træ** en en repræsentation af et (2,4)-træ ved hjælp af et binært træ, hvis knuder er farvet enten **rød** eller **sort**

Et rød-sort-træ har ligesom et (2,4)-træ logaritmisk effektivitet, men det er simplere at implementere, da der kun er én knudetype



# Rød-sort-træ

(Bayer, 1972)

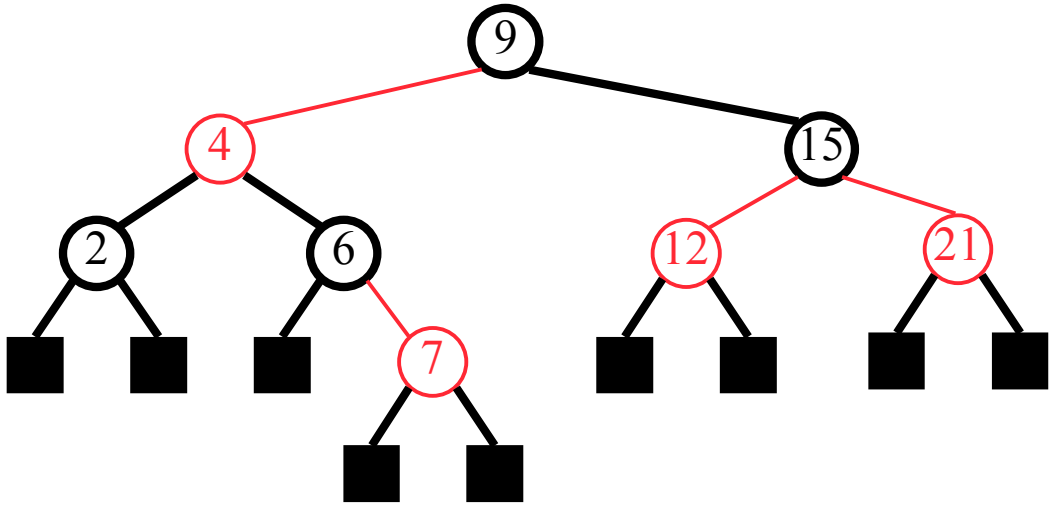
Et rød-sort-træ kan også defineres om et binært søgetræ, der har følgende fire egenskaber:

**Rod-egenskaben**: roden er sort

**Ekstern-egenskaben**: ethvert blad er sort

**Intern-egenskaben**: alle børn af en rød knude er sorte

**Dybde-egenskaben**: alle blade har samme sorte dybde



# Højden af rød-sort-træer

**Sætning**: Højden af et rød-sort-træ med $n$ emner er $O(\log n)$

**Bevis**:

Højden af et rød-sort-træ er højst 2 gange højden af sit tilsvarende (2,4)-træ, som er $O(\log n)$

Søgealgoritmen for et rød-sort-træ er den samme som for et binært søge-træ

Søgning i et rød-sort-træ tager derfor $O(\log n)$ tid

# Indsættelse

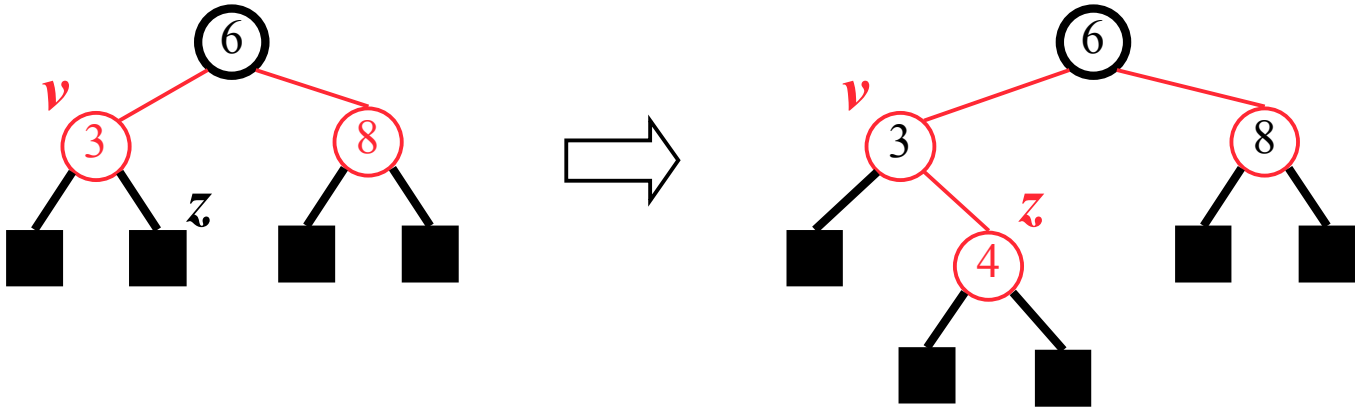
For at udføre operationen **insertItem**(***k***, ***o***), udføres en indsættelse som for et binært søgetræ, og den indsatte knude farves **rød**, med mindre den er roden

Vi opretholder dermed rod-, ekstern- og dybde-egenskaben, men ikke nødvendigvis intern-egenskaben

Hvis forælderen, ***v***, til ***z*** er sort, opretholdes også intern-egenskaben, og vi er færdige

Ellers (***v*** er rød) har vi **dobbelt-rødt**, hvilket kræver en omstrukturering af træet

Eksempel, hvor indsættelsen af 4 giver dobbelt-rødt:



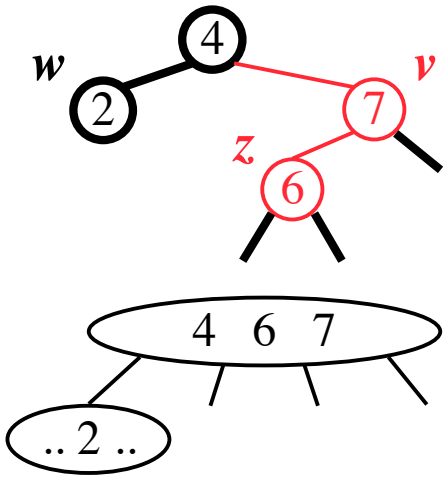
# Afhjælpning af dobbelt-rødt

Betragt en dobbelt-rød-situation med barn ***z*** og forælder ***v***, og lad ***w*** være søskende til ***v***

Tilfælde 1: ***w*** er sort

Dobbelt-rødt svarer til en ukorrekt repræsentation af en 4-knude

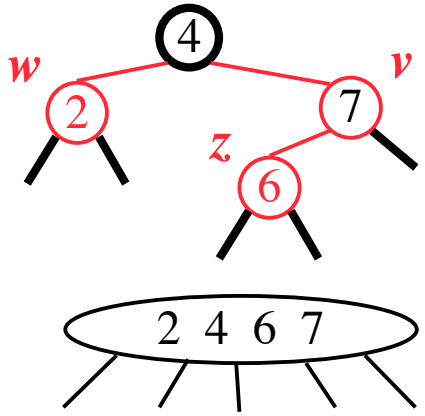
**Omstrukturering**: vi ændrer 4-knude-repræsentationen




Tilfælde 2: ***w*** er rød

Dobbelt-rødt svarer til overløb

**Omfarvning**: Vi udfører en operation svarende til en splitning

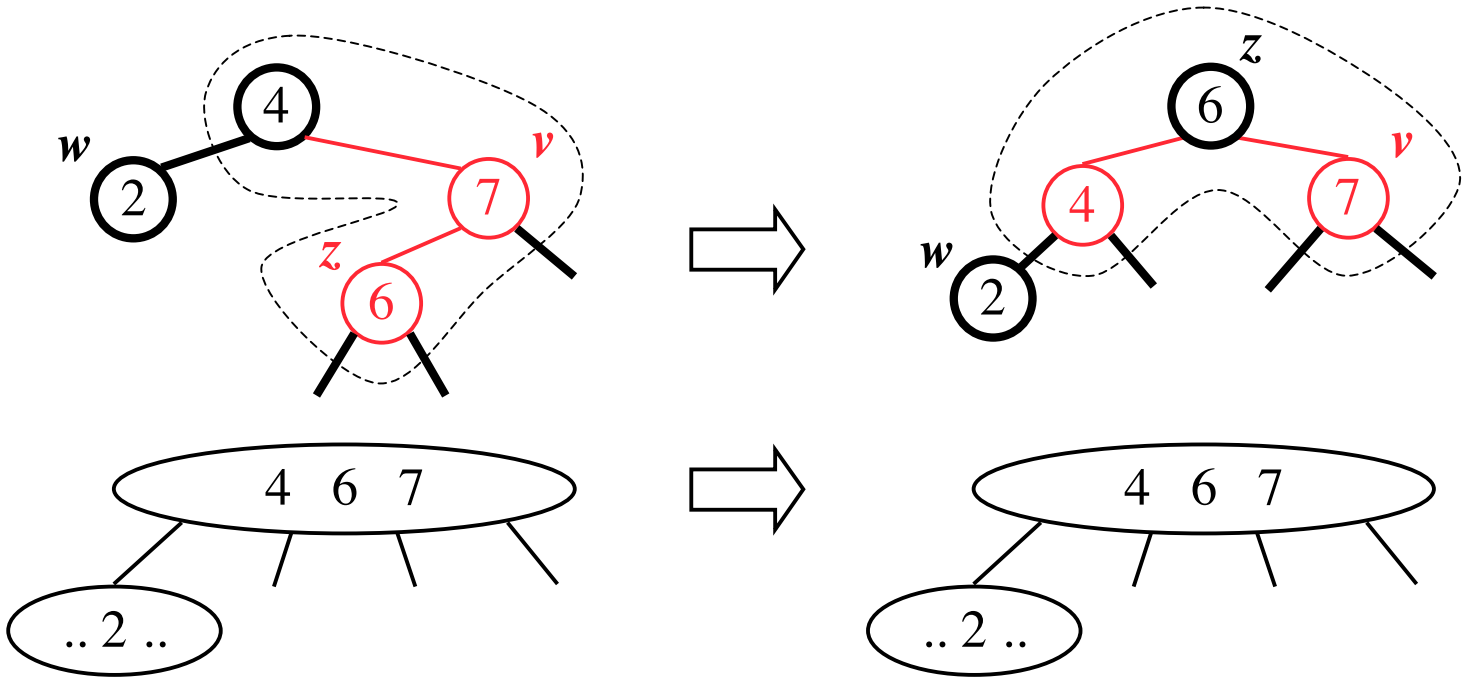


# Omstrukturering

En omstrukturering afhjælper barn-forældre-dobbelt-rødt,
når forældreknuden har en sort søskende

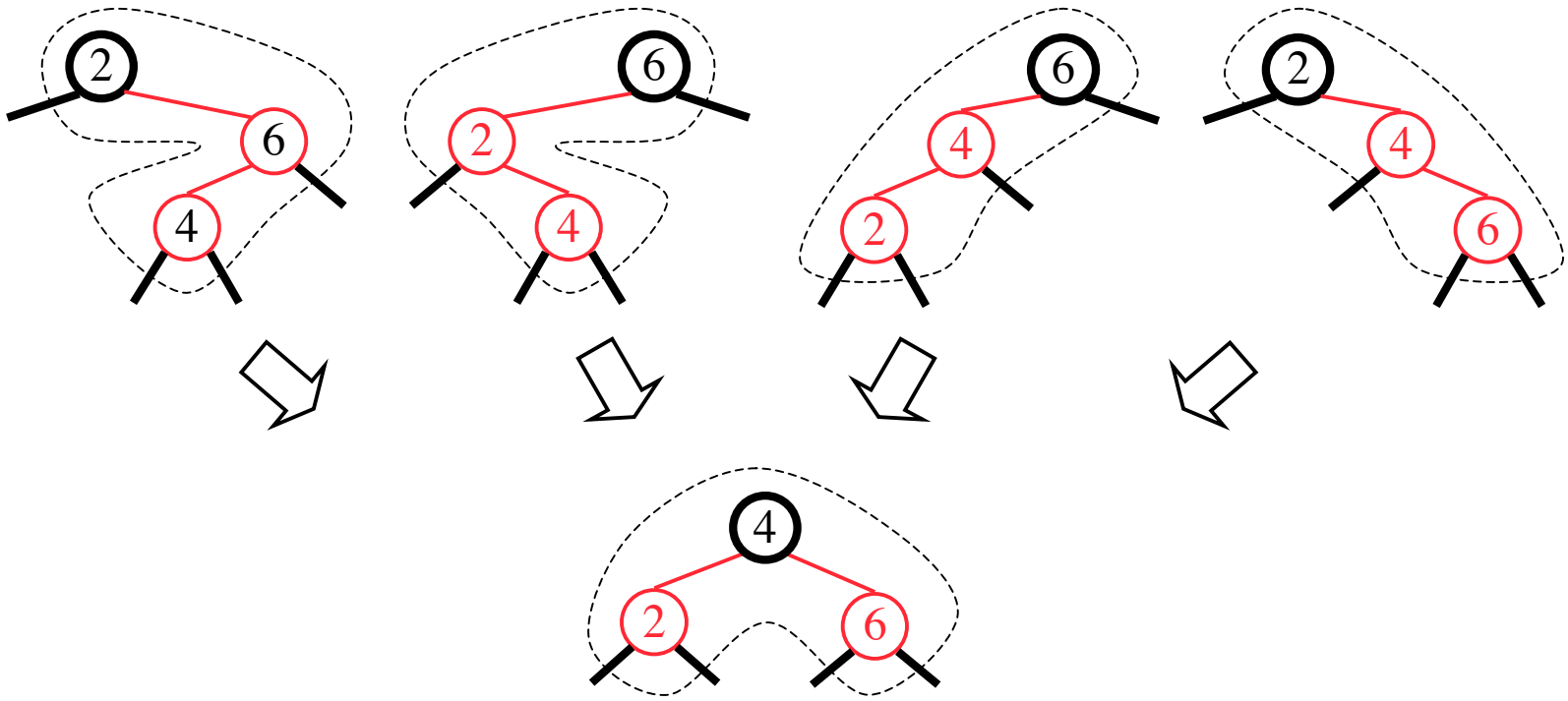
Det svarer til at skabe en korrekt repræsentation af en 4-knude

Intern-egenskaben genskabes, og de øvrige egenskaber bevares



# Omstrukturering (fortsat)

Der er fire muligheder for omstrukturering afhængigt af, om de dobbelt-røde knuder er venstre eller højre-børn



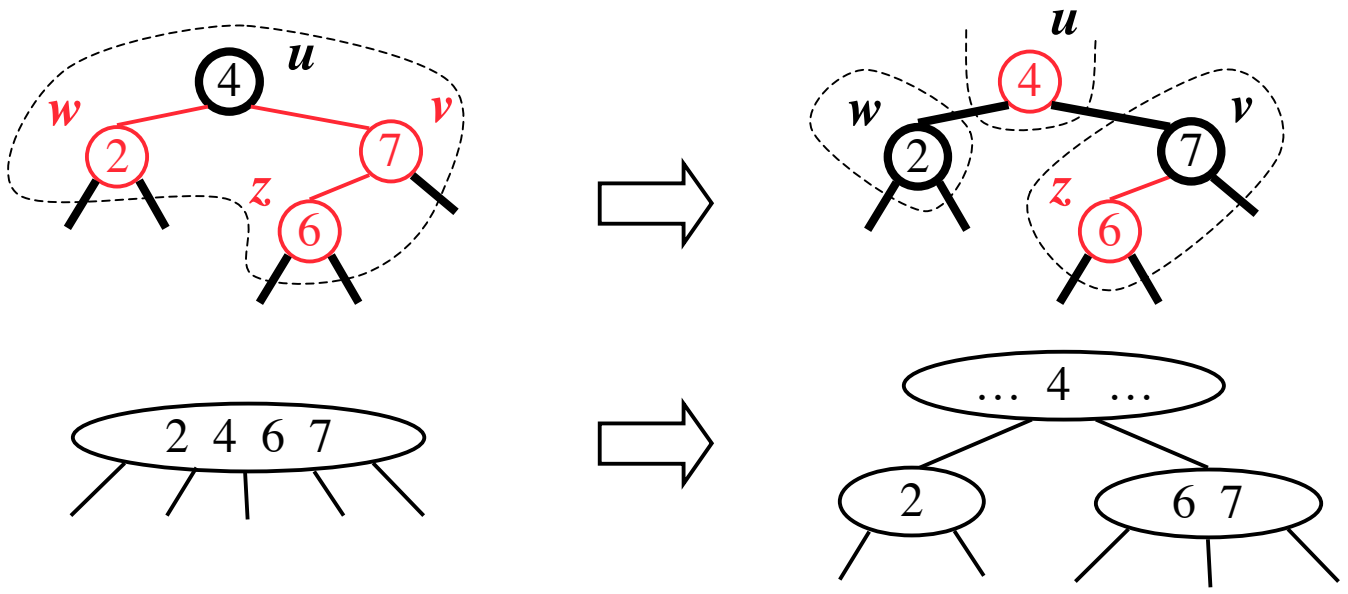
# Omfarvning

En omfarvning afhjælper børn-forælder-dobbelt-rødt, når forælder-knuden har en rød søskende

Forælderen ***v*** og dens søskende ***w*** farves sort, og bedsteforælderen farves rød, medmindre den er roden

Det svarer til at udføre en splitning af en 5-knude

Dobbelt-rødt kan brede sig til bedsteforælderen ***u***



# Analyse af indsættelse

**Algorithm** *insertItem*(***k***, ***o***)

1. Vi søger efter nøglen ***k*** for at lokalisere indsættelsesknuden ***z***

2. Vi tilføjer det ny emne (***k***, ***o***) til knuden ***z*** og farver knuden rød

3. **while** *doubleRed*($z$) **do**
   **if** *isBlack*(*sibling*(*parent*($z$))) **then**
   $z \leftarrow$ *restructure*($z$)
   **else**
   $z \leftarrow$ *recolor*($z$)

Lad ***T*** være et (2,4)-træ med ***n*** emner

- ***T***'s højde er ***O***(log ***n***)
- Trin 1 tager ***O***(log ***n***) tid, da vi besøger ***O***(log ***n***) knuder
- Trin 2 tager ***O***(1) tid
- Trin 3 tager ***O***(log ***n***) tid, da vi udfører ***O***(log ***n***) omfarvninger, som hver tager ***O***(1) tid, samt højst en omstrukturering, som tager ***O***(1) tid

Derfor tager indsættelse i et rød-sort-træ ***O***(log ***n***) tid

# Fjernelse

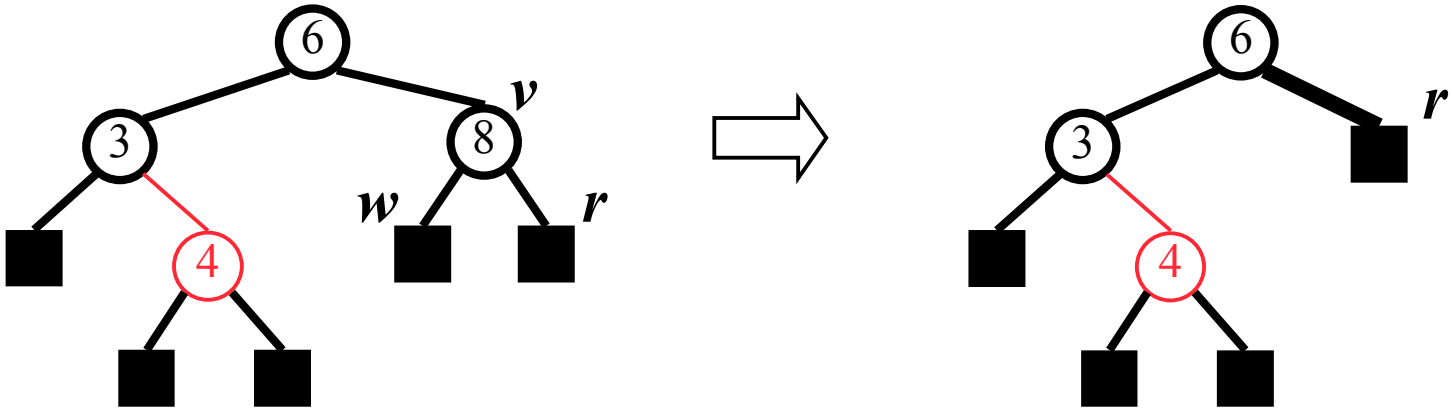
For at udføre operationen **remove**(***k***), udføres en fjernelse som for et binært søgetræ

Lad ***v*** være den fjernede interne knude, ***w*** den fjernede eksterne knude, og lad ***r*** være ***w***'s søskende

Hvis enten ***v*** eller ***r*** var røde, farver vi ***r*** sort, og vi er færdige

Ellers (både ***v*** og ***r*** var sorte) farver vi ***r*** **dobbelt-sort**, hvilket ødelægger intern-egenskaben og nødvendiggør en omstrukturering

Eksempel: Fjernelse af 8 giver dobbelt-sort



# Afhjælpning af dobbelt-sort

Algoritmen til afhjælpning af dobbelt-sort knude ***r*** med søskende ***y*** behandler tre tilfælde:

**Tilfælde 1**: ***y*** er sort og har et rødt barn
Der udføres en omstrukturering (svarende til en overførsel), og vi er færdige

**Tilfælde 2**: ***y*** er sort, og begge dens børn er sorte
Der udføres en omfarvning (svarende til fusionering), hvilket kan give dobbelt-sort opad i træet

**Tilfælde 3**: ***y*** er rød
Der udføres en justering (svarende til valg af anden repræsentation for en 3-knude), hvorved tilfælde 1 eller 2 opstår

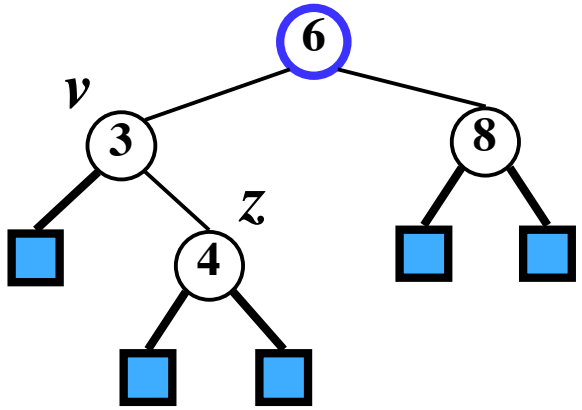
Fjernelse fra et rød-sort-træer tager $O(\log n)$ tid

# AVL-træer contra Rød-Sort-træer

Et rød-sort-træ er sædvanligvis mere effektivt

Indsættelse i et AVL-træ kræver (i værste tilfælde) 2 gennemløb af en vej (ned til et blad og tilbage til roden), mens indsættelse i et rød-sort-træ kan klares med 1 gennemløb

# Splay-træer



# I splay-træer foretages rotation efter enhver operation (selv efter søgning)

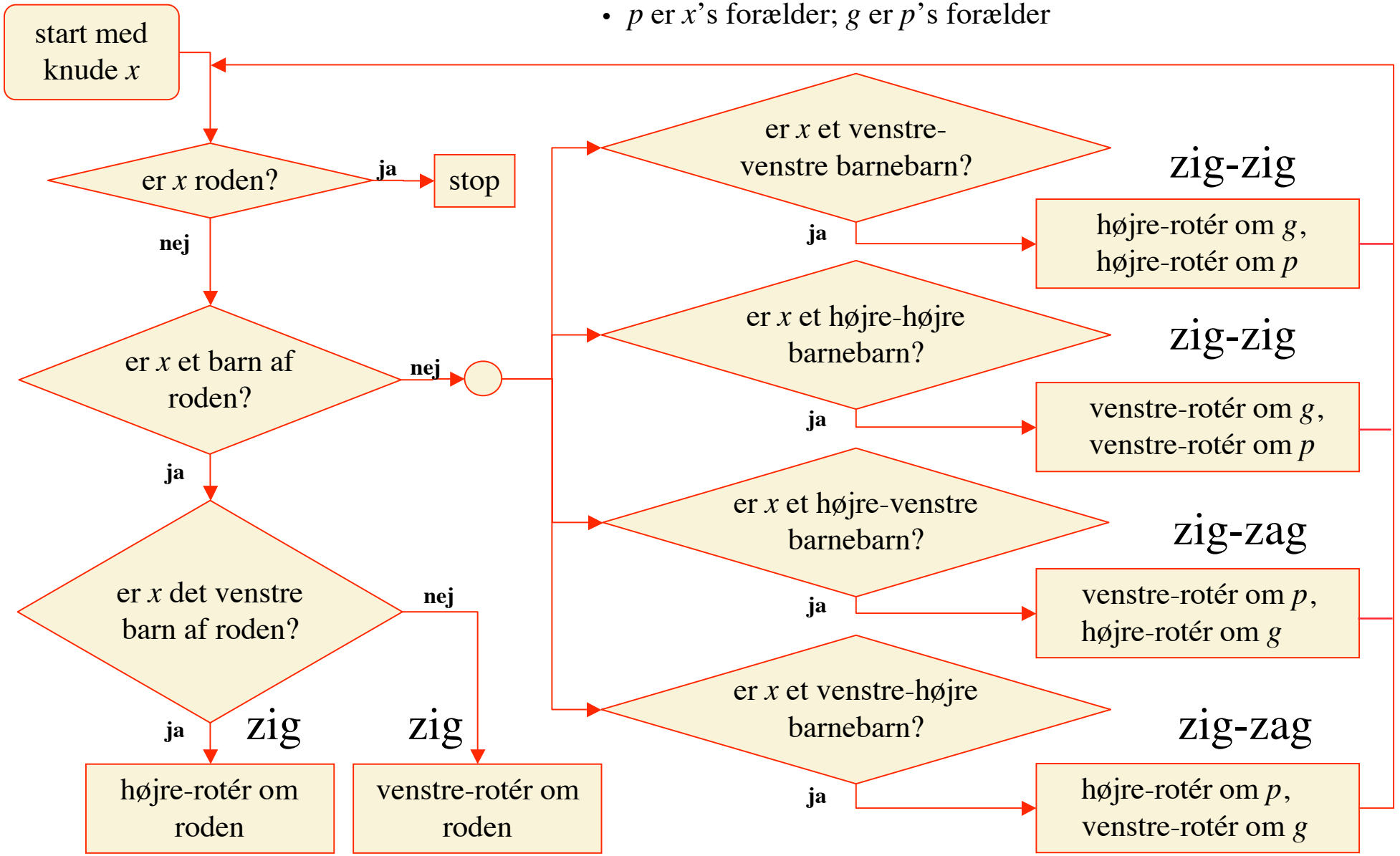
Ny operation: ***splay***

flytter en knude op som rod ved hjælp af rotationer

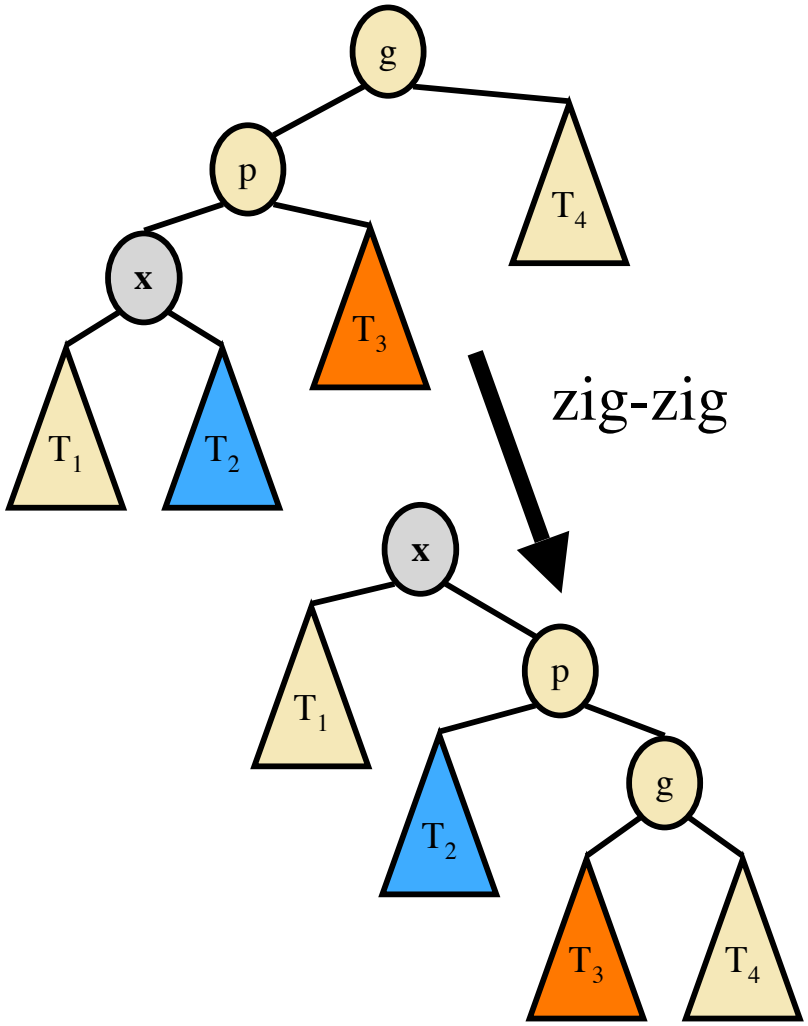
to splay ≈ at forvride

# Splaying:

- at "*x* er et højre-venstre barnebarn" betyder, at *x* er et højre barn af sin forælder, som selv er et venstre barn af sin forælder
- *p* er *x*'s forælder; *g* er *p*'s forælder



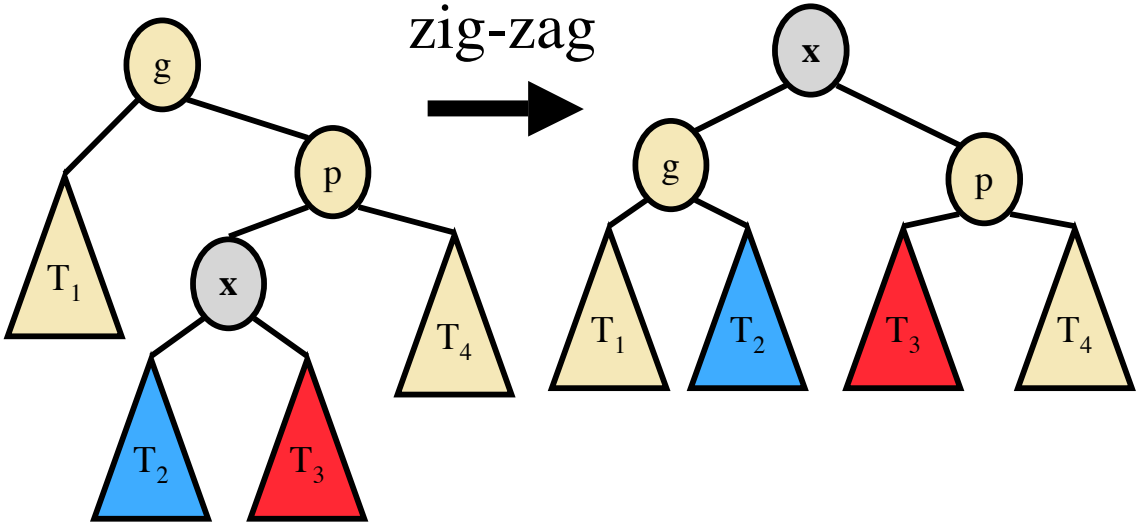
# Visualisering af tilfældene



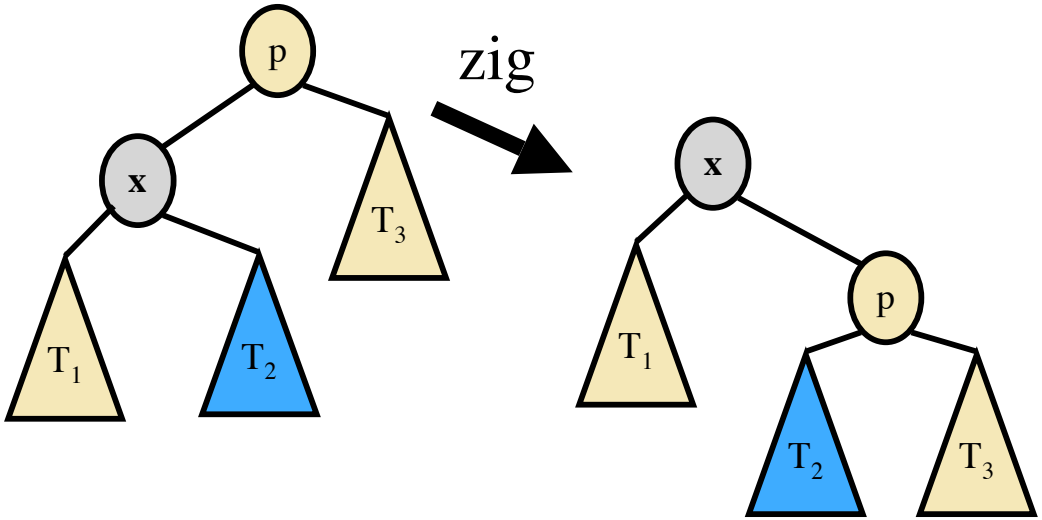

zig-zig



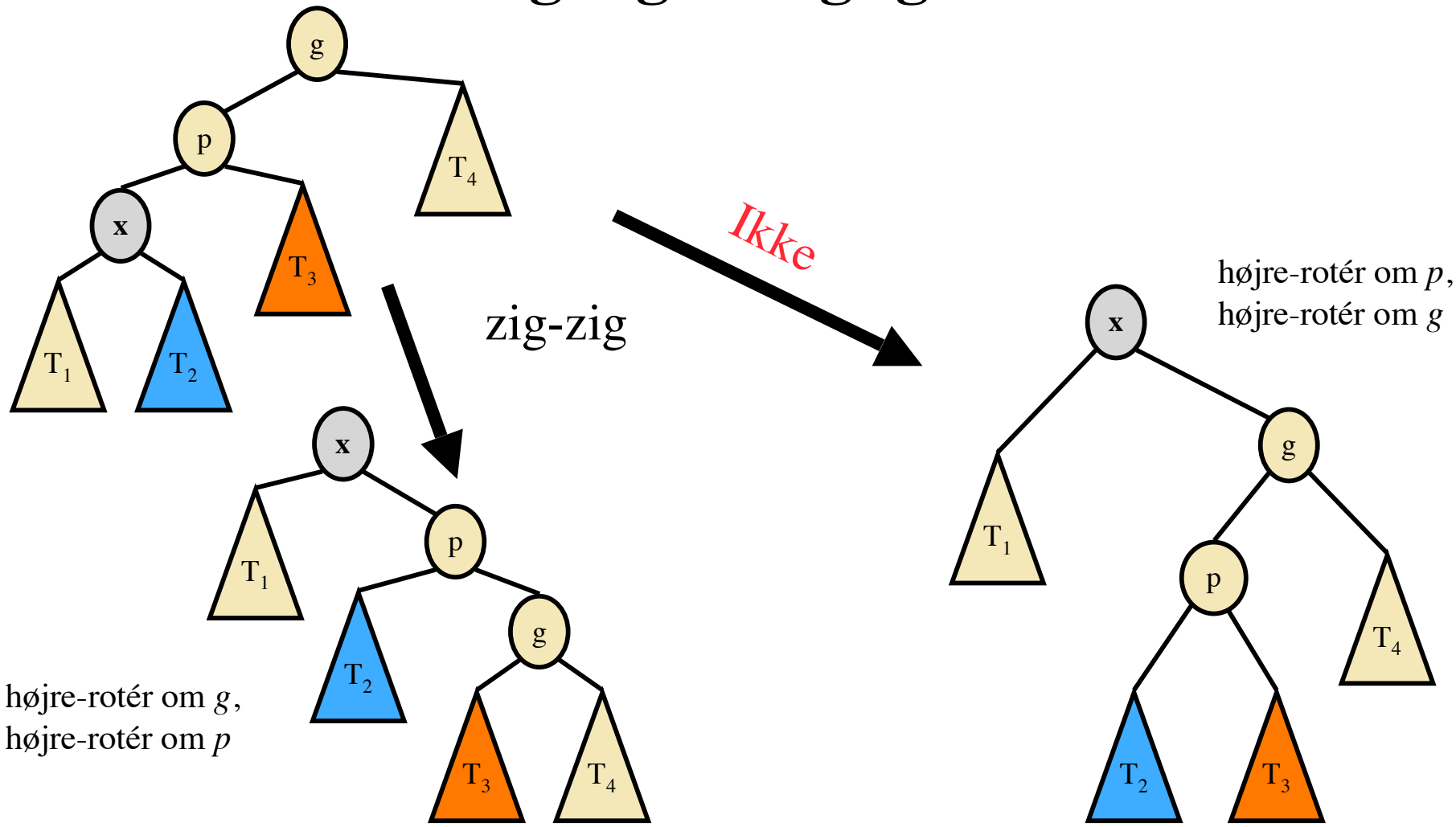

zig-zag




zig



# Rækkefølgen af rotationer for zig-zig er vigtig

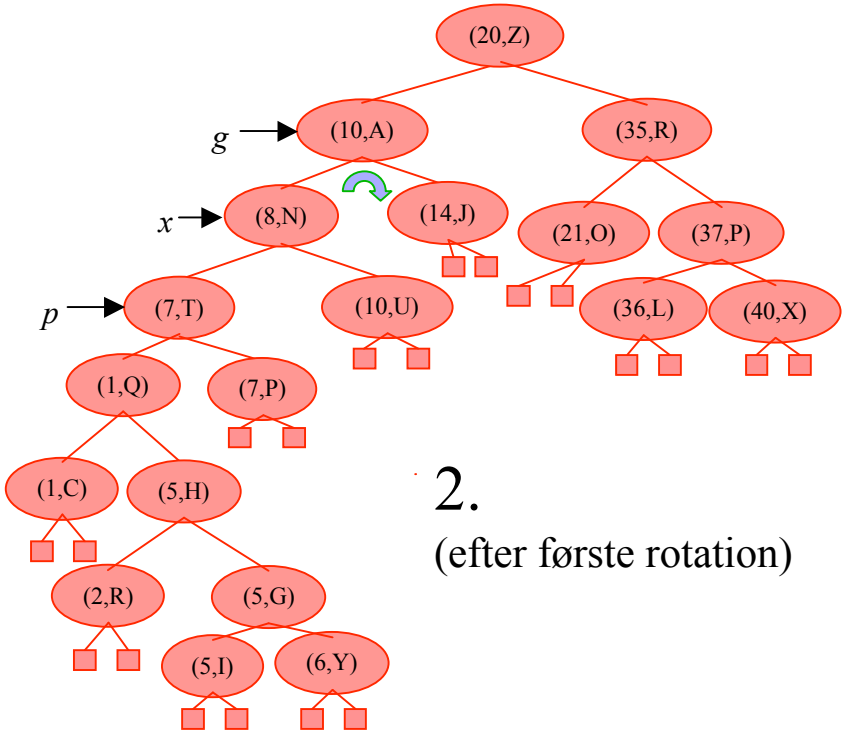


# Eksempel

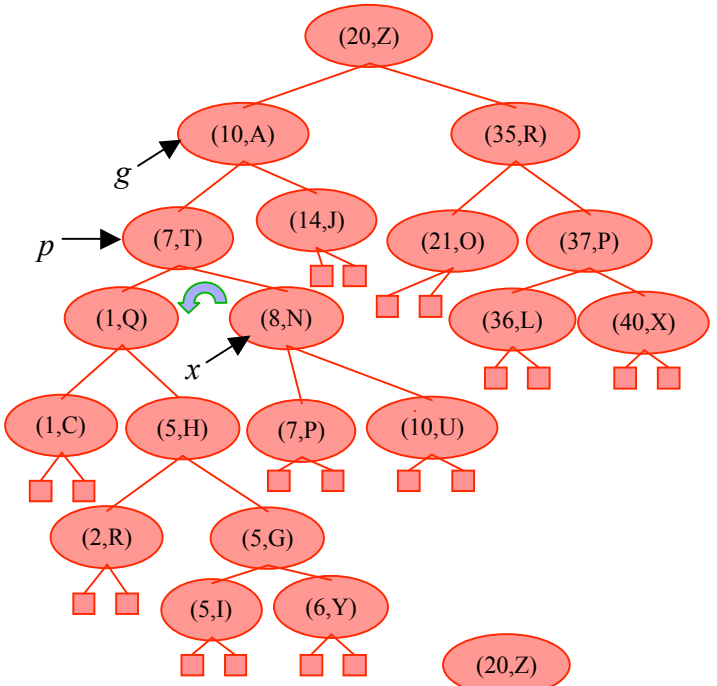
Lad $x$ = (8,N)

$x$ er det højre barn af sin forælder, der er det venstre barn af bedsteforælderen

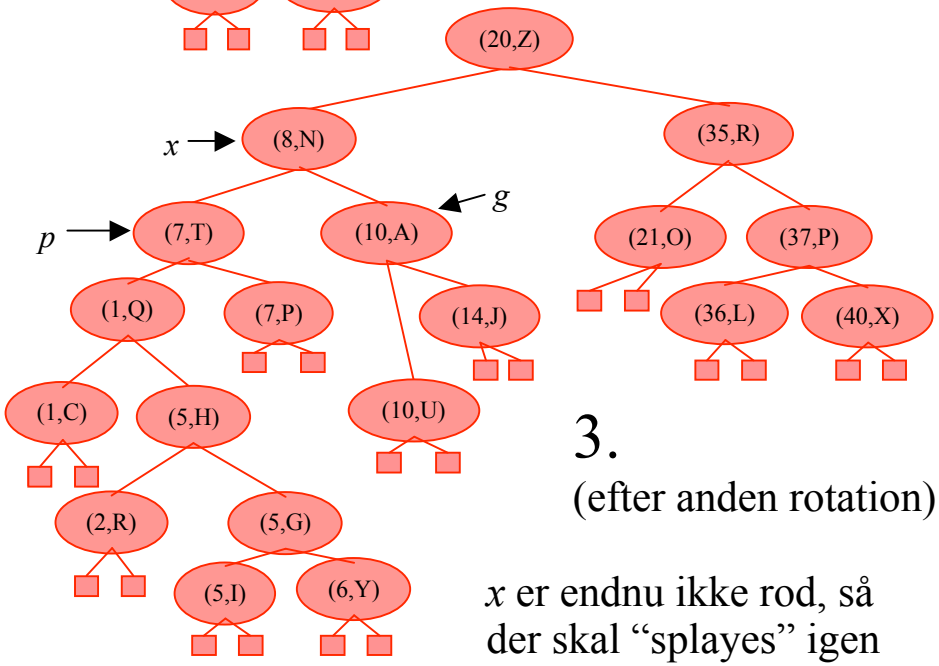
venstre-rotér om $p$ og højre-rotér om $g$ (zig-zag)




2.
(efter første rotation)




1.
(inden rotation)



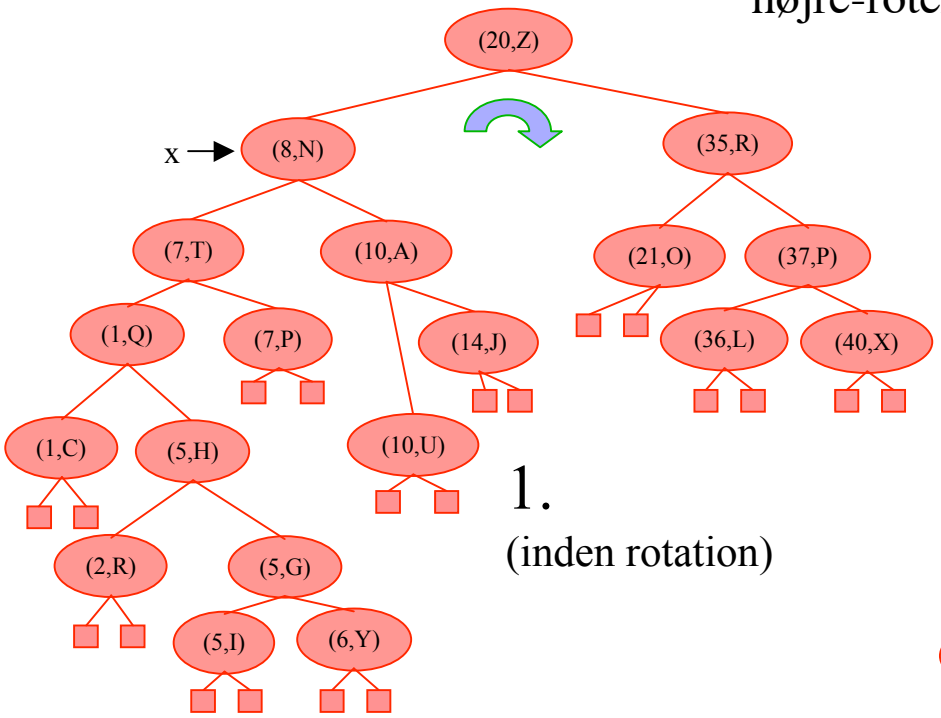

3.
(efter anden rotation)

$x$ er endnu ikke rod, så der skal "splayes" igen

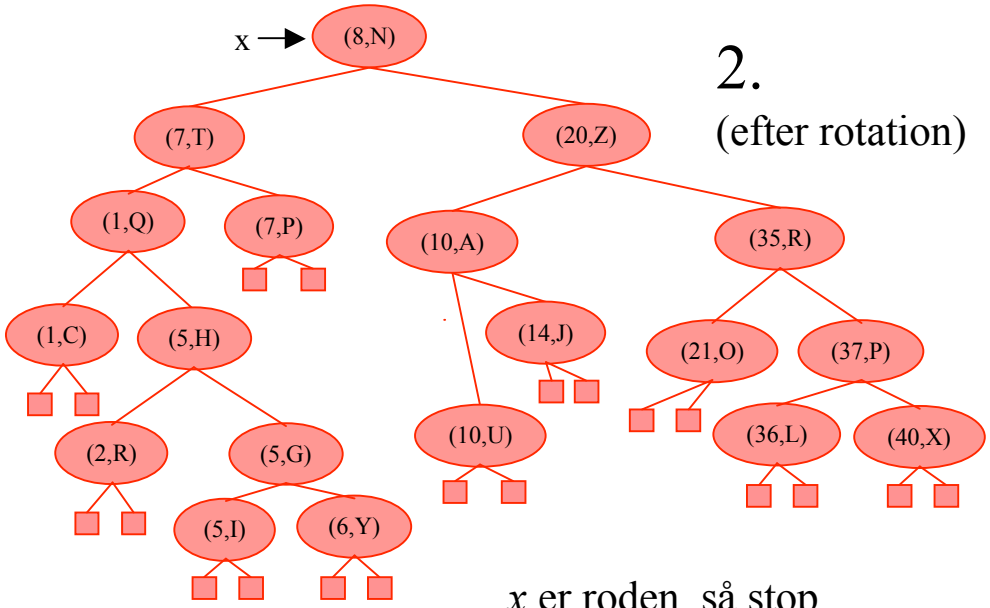
# Eksempel (fortsat)

nu er *x* venstre barn af roden

højre-rotér om roden (zig)



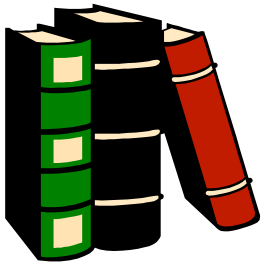

1.
(inden rotation)




2.
(efter rotation)

*x* er roden, så stop

# Definition af splay-træ



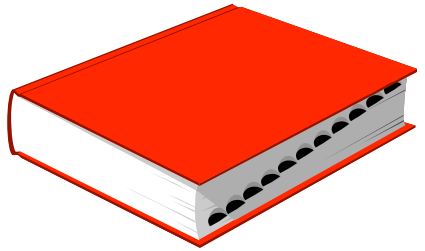
Et **splay tree** er et binært søgetræ, hvor hver knude "splayes", efter at den er tilgået (efter en søgning eller en opdatering)

Den dybeste interne knude, der er tilgået, bliver splayet

Splaying koster $\boldsymbol{O}(h)$, hvor $h$ er højden af træet - i værste tilfælde $\boldsymbol{O}(n)$

[ $O(h)$ rotationer, som hver koster $O(1)$ ]

# Splay-knuder



Hvilken knude splayes efter en operation?

| operation | splay-knude |
|---|---|
| findElement | hvis nøglen findes i en knude, da denne knude<br>hvis nøglen ikke findes, så forælderen til til den eksterne knude, hvor søgningen stoppede |
| insertElement | den nye knude, der indeholder det indsatte element |
| removeElement | forælderen til den interne knude, der blev fjernet |

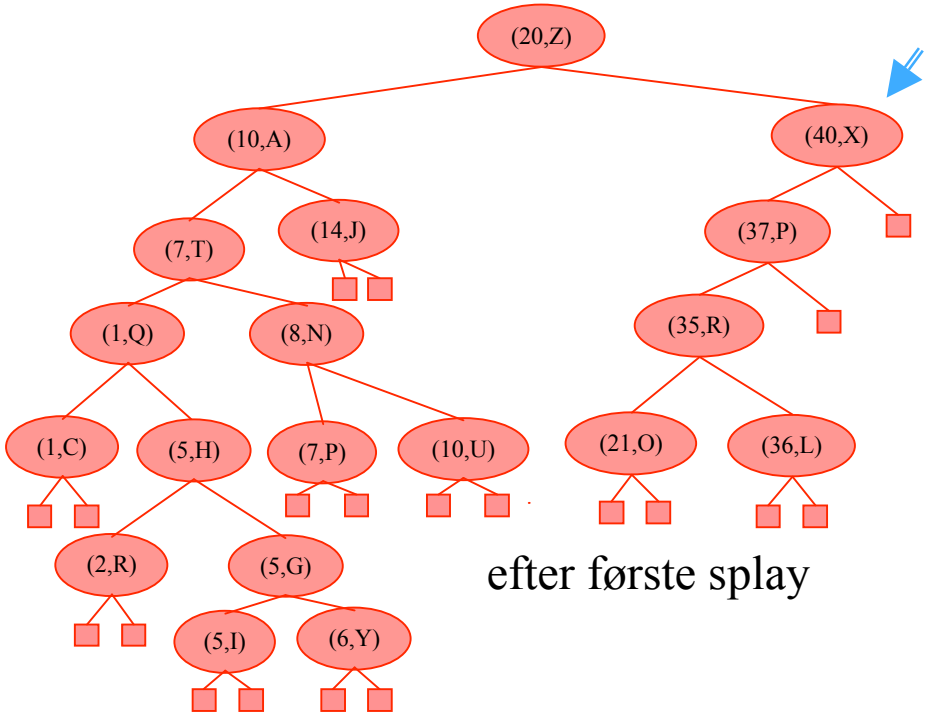
# Eksempel på resultatet af splaying

Træet behøver ikke at blive mere balanceret

Eksempel: splay (40,X)

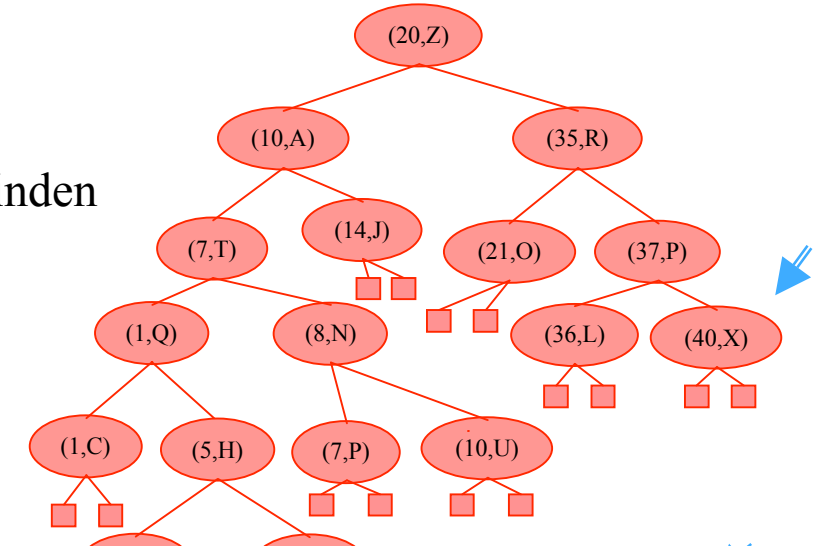
*før* er dybden af det højeste blad 3,
og dybden af det dybeste er 7

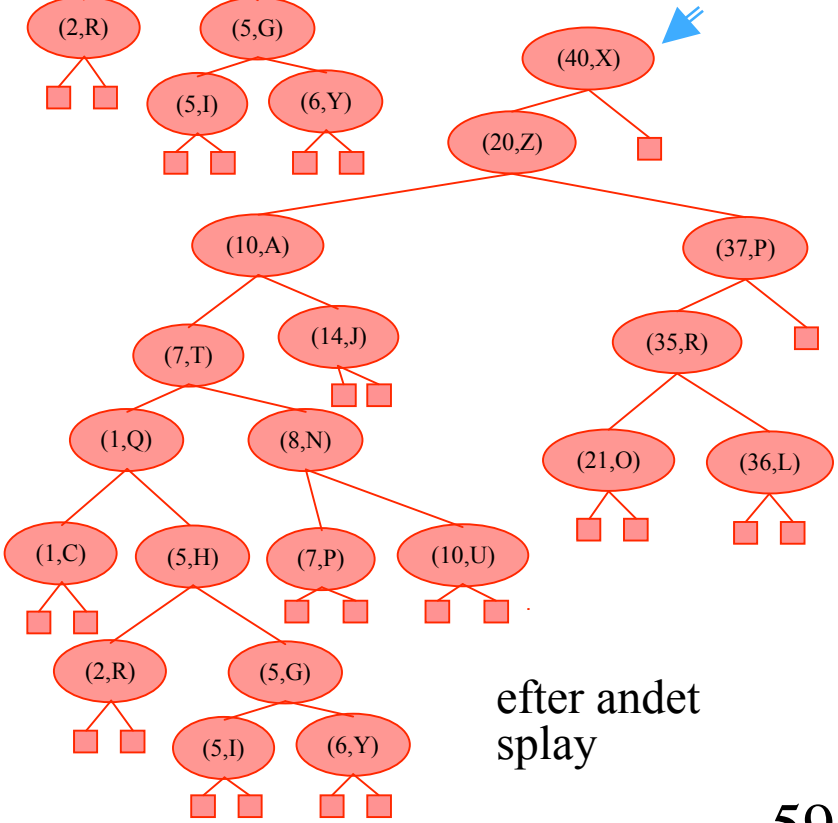
*efte*r er dybden af det højeste blad 1,
og dybden af det dybeste er 8




efter første splay

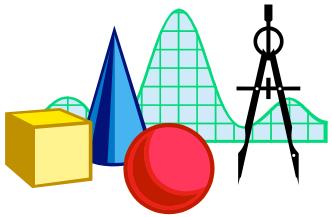
inden




efter andet splay

# Amortiseret analyse af splay-træer



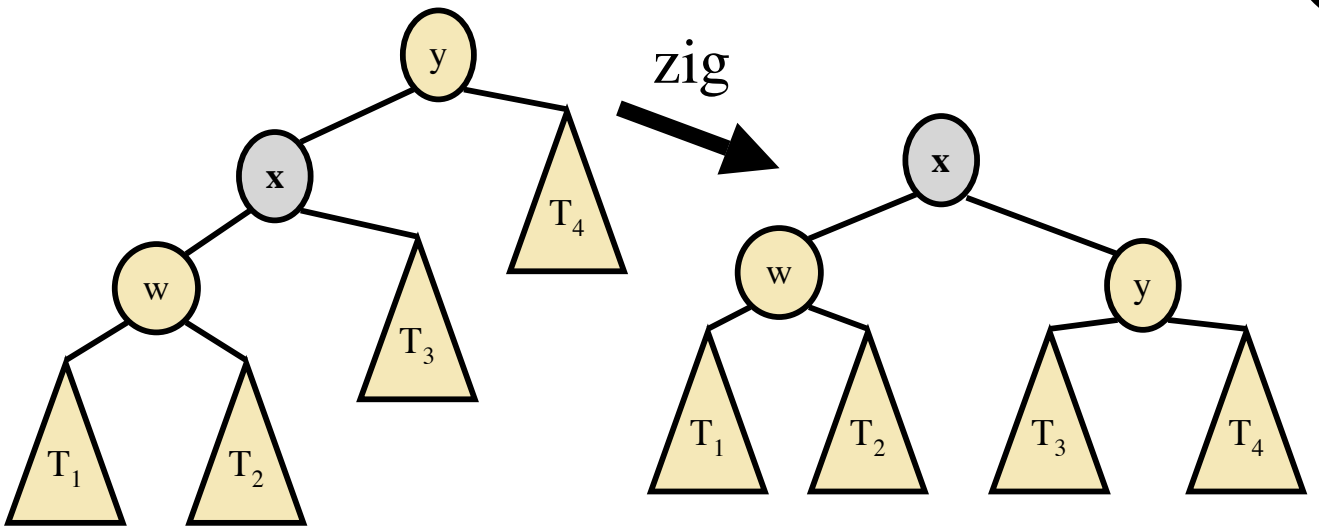
Køretiden for enhver operation er proportional med den tid, der bruges på splaying

Omkostninger: zig = 1 krone, zig-zig = 2 kroner, zig-zag = 2 kroner
Dermed bliver omkostningen for at splaye en knude, der har dybde $d$, lig med $d$ kroner

Definer rank($v$) som logaritmen til antallet af knuder i undertræet med rod $v$

Antag, at vi lagrer rank($v$) kroner i enhver knude $v$ i splay-træet

# Omkostning per zig



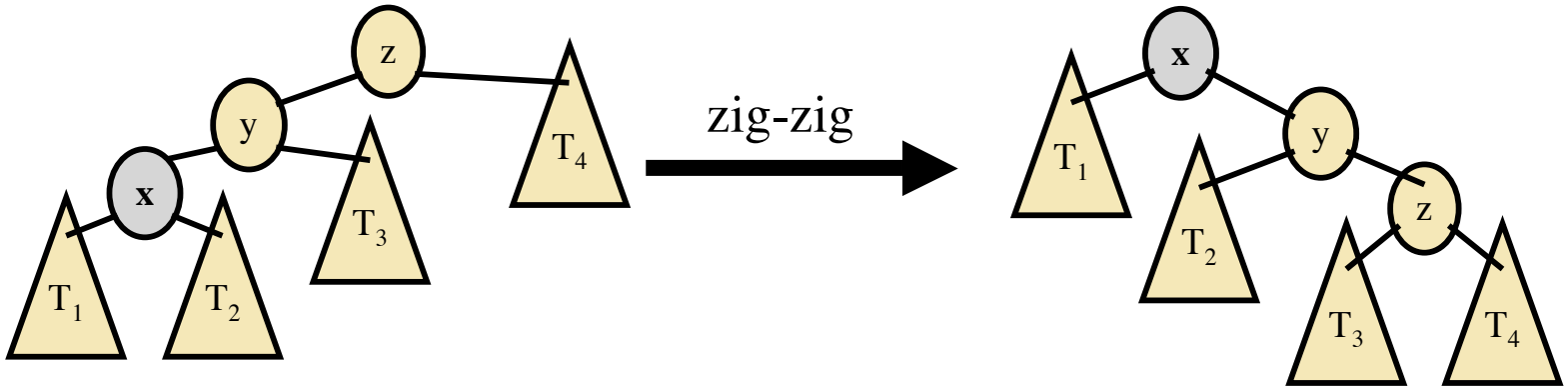

Udførelse af en zig koster højst rank'($x$) - rank($x$):

cost = rank'($x$) + rank'($y$) - rank($y$) - rank($x$)

≤ rank'($x$) - rank($x$)

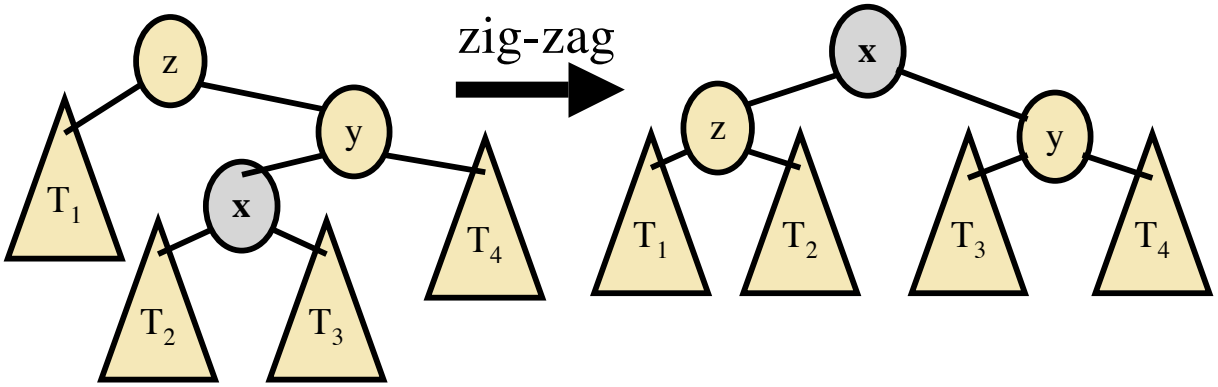
[ rank'(y) ≤ rank(y) ]

# Omkostning per zig-zig og zig-zag




Udførelse af zig-zig eller zig-zag koster højst 3(rank'($x$) - rank($x$)) - 2

Bevis: side 192 i lærebogen



# Omkostning for splaying

Omkostningen for at splaye en knude $x$ på dybden $d$ i et træ med rod $r$ er højst $3(\text{rank}(r) - \text{rank}(x)) - d + 2$

**Bevis**: Splaying af $x$ bruger $\lceil d/2 \rceil$ deltrin:

$$
\begin{aligned}
\text{cost} &= \sum_{i=1}^{d/2} \text{cost}_i \\
&\le \sum_{i=1}^{d/2} (3(\text{rank}_i(x) - \text{rank}_{i-1}(x)) - 2) + 2 \\
&= 3(\text{rank}(r) - \text{rank}_0(x)) - 2(d/2) + 2 \\
&\le 3(\text{rank}(r) - \text{rank}(x)) - d + 2
\end{aligned}
$$

# Effektiviteten af splay-træer

Husk, at rangen af en knude er logaritmen til dets undertræs størrelse

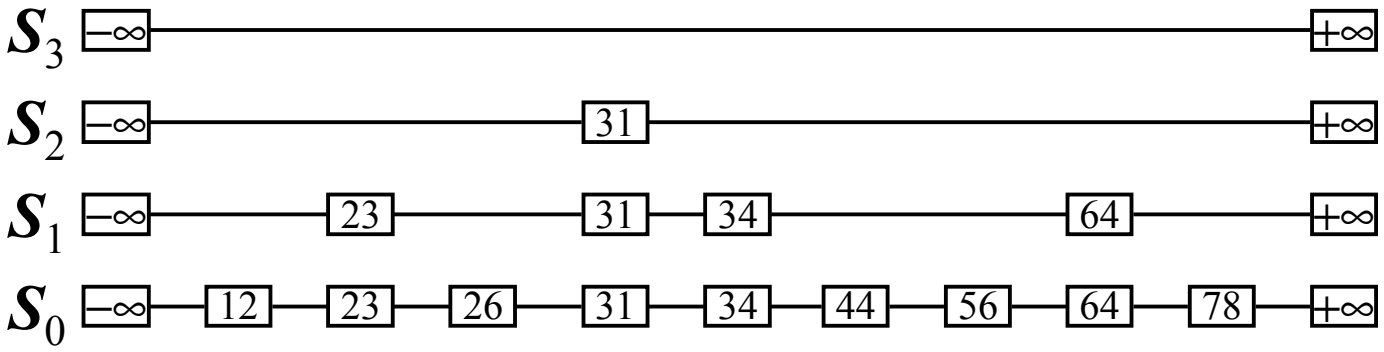
Derfor er den amortiserede omkostning for enhver splay-operation $\boldsymbol{O}(\log \boldsymbol{n})$.

Splay-træer kan faktisk tilpasse sig, så der udføres søgning på ofte forespurgte emner hurtigere end $\boldsymbol{O}(\log \boldsymbol{n})$

# Hvad er en skipliste?

En **skipliste** er en mængde $S$ af forskellige (nøgle, element)-par i en række af lister $S_0, S_1, \ldots, S_h$, hvor

Hver liste $S_i$ indeholder de specielle nøgler $-\infty$ and $+\infty$
Listen $S_0$ indeholder alle nøgler i $S$ i ikke-aftagende orden
Hver liste er en delsekvens af den forrige, d.v.s. $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \ldots \supseteq S_h$
Listen $S_h$ indeholder kun de to specielle nøgler



# Søgning

Vi søger efter en nøgle ***x*** i en skipliste således:

Start i første position i den øverste liste

I den aktuelle position, ***p***, sammenlignes ***x*** med ***y*** = ***key***(***after***(***p***))

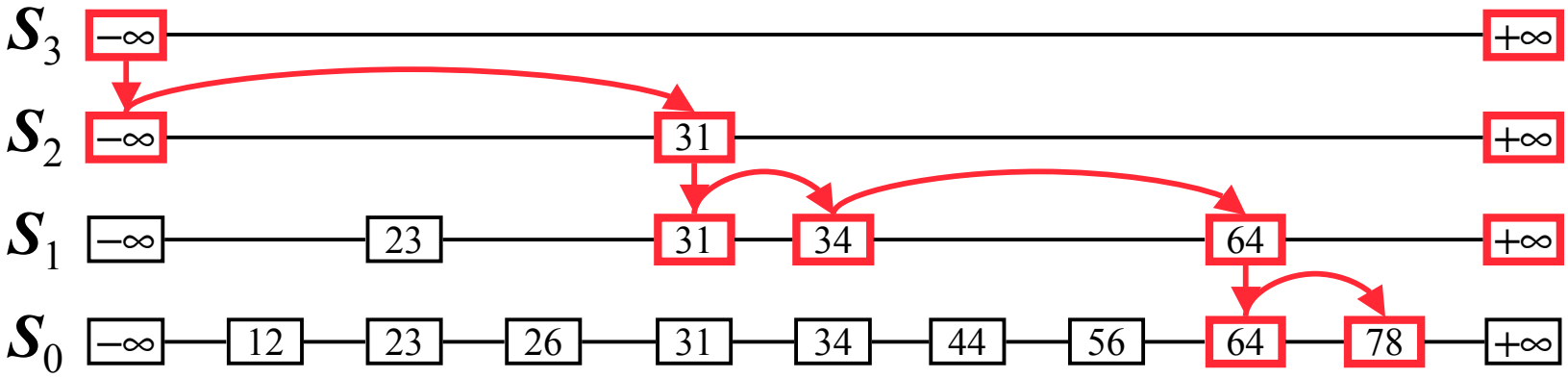
Hvis ***x*** = ***y***, returneres ***element***(***after***(***p***))

Hvis ***x*** > ***y***, søges videre "fremad"

Hvis ***x*** < ***y***, søges videre "nedad"

Hvis der forsøges at gå nedad fra den nederste liste, returneres ***NO_SUCH_KEY***

Eksempel: søgning efter 78



# Randomiserede algoritmer

En **randomiseret algoritme** udfører møntkast (d.v.s. bruger tilfældige bit) til at styre sin udførelse

Den indeholder sætninger af typen

$b \leftarrow random()$
**if** $b = 0$ **then**
  do A …
**else** $\{ b = 1 \}$
  do B …

Køretiden afhænger af møntkastenes udfald

Den forventede køretid af en randomiseret algoritme analyseres ud fra følgende forudsætninger:

Mønten er "upartisk"
Møntkastene er uafhængige

Køretiden for det værste tilfælde for en randomiseret algoritme er ofte stor, men sandsynligheden for, at det indtræffer, er meget lille (det indtræffer, når alle møntkast giver samme udfald)

# Indsættelse

For at indsætte et emne ($x$, $o$) i en skipliste benyttes en randomiseret algoritme:

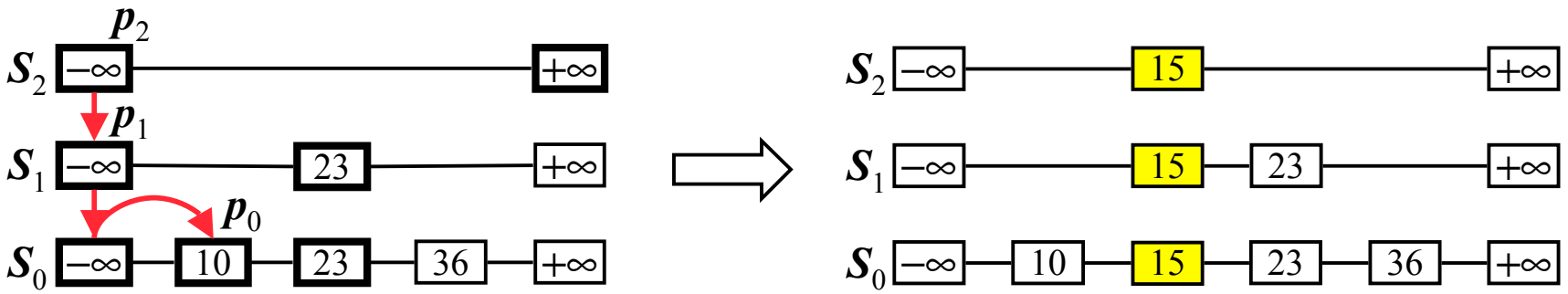
Vi kaster gentagne gange en mønt, indtil vi får "plat". Vi betegner med $i$ det antal gange, vi har fået "krone"

Hvis $i \geq h$, tilføjes de nye lister $S_{h+1}, \ldots, S_{i+1}$, som hver kun indeholder de to specielle nøgler

Herefter søges efter $x$ i skiplisten, og vi bestemmer positionerne $p_0, p_1, \ldots, p_i$ på de emner, der har størst nøgle mindre end $x$ i hver af listerne $S_0, S_1, \ldots, S_i$

For $j \leftarrow 0, \ldots, i$ indsættes ($x$, $o$) i listen $S_j$ efter position $p_j$

Eksempel: indsættelse af nøgle 15 med $i = 2$



# Fjernelse

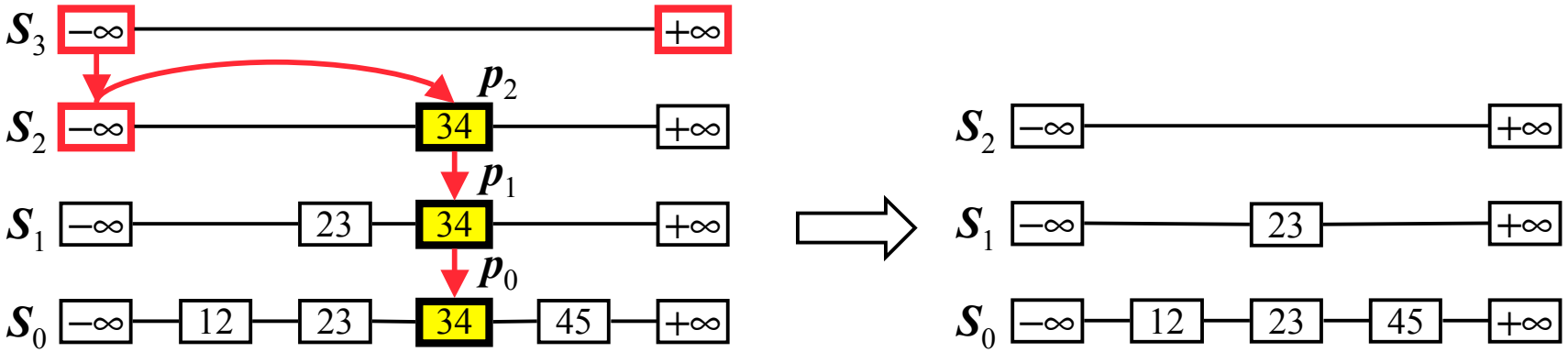
For at fjerne et emne med nøgle $x$ fra en skipliste benyttes følgende fremgangsmåde:

Søg efter $x$ i skiplisten og find positionerne $p_0, p_1, \ldots, p_i$ for de emner med nøgle $x$, hvor position $p_j$ er i listen $S_j$

Fjern positionerne $p_0, p_1, \ldots, p_i$ fra listerne $S_0, S_1, \ldots, S_i$

Med undtagelse af en, fjernes alle lister, der nu kun indeholder de to specielle nøgler

Eksempel: fjernelse af nøglen 34



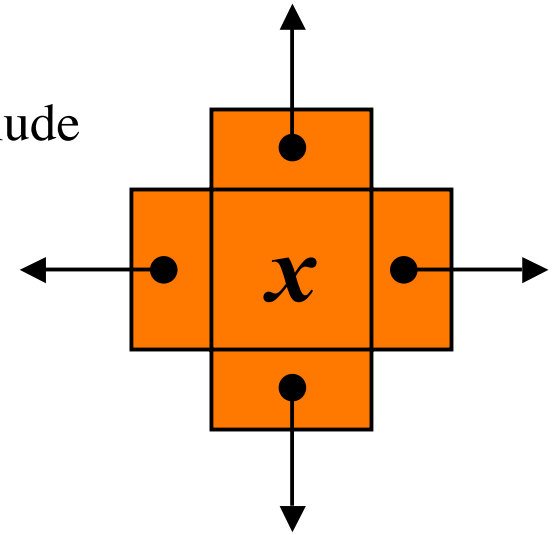
# Implementering

En skipliste kan implementeres ved hjælp af **quad-knuder**

En quad-knude indeholder:

- emnet
- hægte til knuden før
- hægte til knuden efter
- hægte til knuden under
- hægte til knuden over

quad-knude




Desuden defineres de specielle nøgler MINUS_INF og PLUS_INF, og comparator-objektet ændres, så det kan håndtere disse nøgler

# Pladsforbrug

Pladsen, der bruges af en skipliste afhænger af de tilfældige bits, der bruges til indsættelses-algoritmen.

Følgende sandsynlighedsteoretiske fakta benyttes:

**Faktum 1**: Sandsynligheden for at få $i$ kroner i træk ved kast med en mønt er $1/2^i$

**Faktum2**: Hvis ethvert af $n$ emner findes i en mængde med sandsynlighed $p$, vil det forventede antal elementer i mængden være $np$

Betragt en skipliste med $n$ emner

Ud fra faktum 1 indsættes et emne i listen $S_i$ med sandsynligheden $1/2^i$

Ud fra faktum 2 vil den forventede størrelse af listen $S_i$ være $n/2^i$

Det forventede antal knuder i en skipliste er

$$\sum_{i=0}^{h} \frac{n}{2^i} = n \sum_{i=0}^{h} \frac{1}{2^i} < 2n$$

Derfor er det forventede pladsforbrug for en skipliste med $n$ emner $O(n)$

# Højde

Køretiden for søgning og indsættelse i en skipliste afhænger af højden $h$ af skiplisten

Vi kan vise, at en skipliste med $n$ elementer har højde $O(\log n)$ med høj sandsynlighed

Hertil benyttes endnu et sandsynligheds-teoretisk faktum:

**Faktum 3**: Hvis enhver af $n$ hændelser har sandsynlighed $p$, vil sandsynligheden for at mindst én hændelse indtræffer være højst $np$ (summen af deres sandsynligheder)

Betragt en skipliste med $n$ emner

Ud fra faktum 1 indsættes et emne i listen $S_i$ med sandsynligheden $1/2^i$

Ud fra faktum 3 vil sandsynligheden for at listen $S_i$ har mindst ét emne være højst $n/2^i$

Ved at vælge $i = 3\log n$ fås, at sandsynligheden for at $S_{3\log n}$ har mindst ét element er højst

$$n/2^{3\log n} = n/n^3 = 1/n^2$$

En skipliste med $n$ emner har derfor en højde, der højst er $3\log n$ med en sandsynlighed, der mindst er $1 - 1/n^2$

# Effektivitet af søgning

Søgetiden for en skipliste er proportional med

antallet af *nedadgående* skridt, plus

antallet af *fremadgående* skridt

De nedadgående skridt er begrænset af højden af skiplisten og er således $O(\log n)$ med høj sandsynlighed

For at analysere de fremadgående skridt benyttes endnu et sandsynlighedsteoretisk faktum:

**Faktum 4**: Det forventede antal møntkast, der kræves for at slå plat, er 2

Når der søges fremad i en liste, vil enhver af de nøgler, der undersøges, ikke tilhøre en højereliggende liste

Et fremadgående skridt er knyttet til et tidligere møntkast

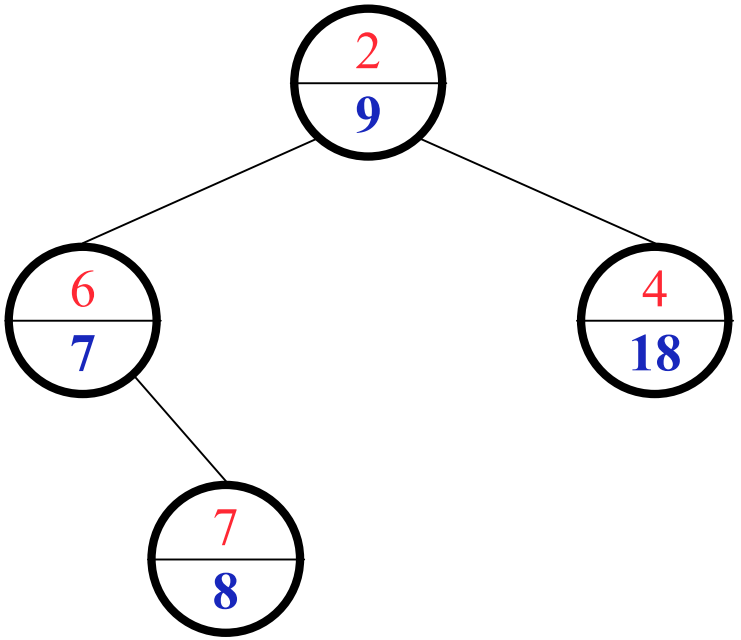
Ud fra faktum 4 er det forventede antal fremadgående skridt i hver liste lig med 2

Derfor er det forventede antal fremadgående skridt $O(\log n)$

Vi kan derfor konkludere, at søgning forventes at tage $O(\log n)$ tid

Analyse af indsættelse og fjernelse giver tilsvarende resultater

# Treaps

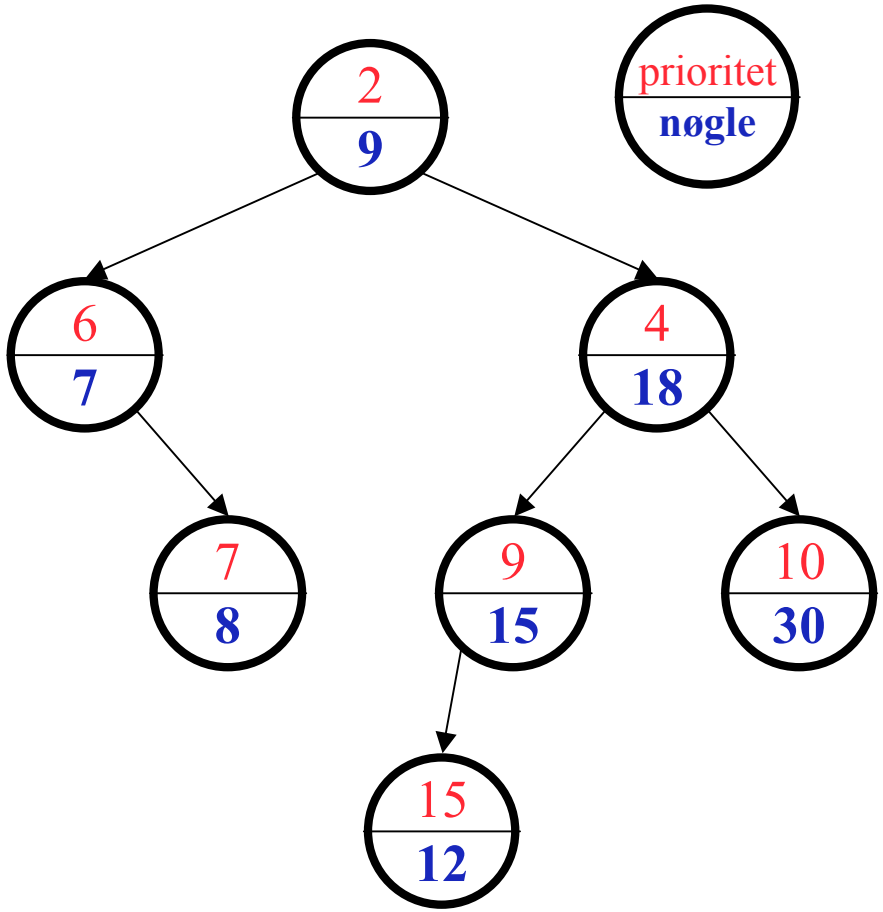


# Treap

En **treap** er et binært søgetræ, der samtidig opfylder hobbetingelsen

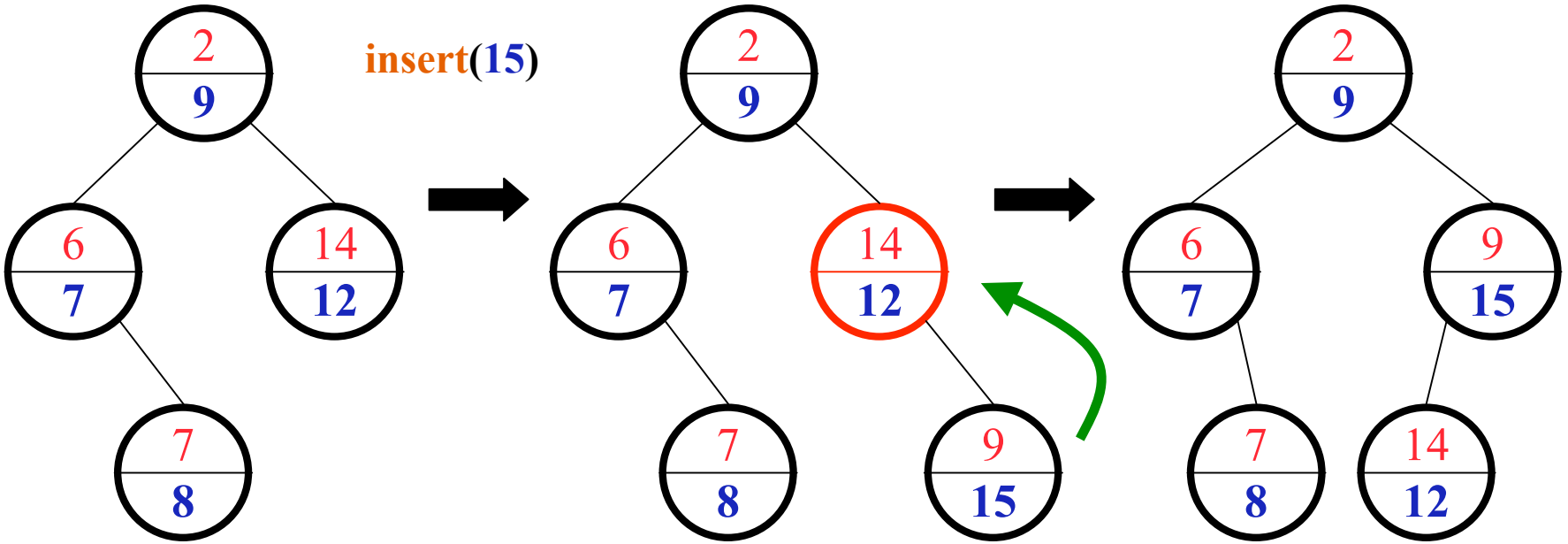
Prioriteterne vælges tilfældigt

Indsættelse, søgning og fjernelse forventes at tage $O(\log n)$ tid



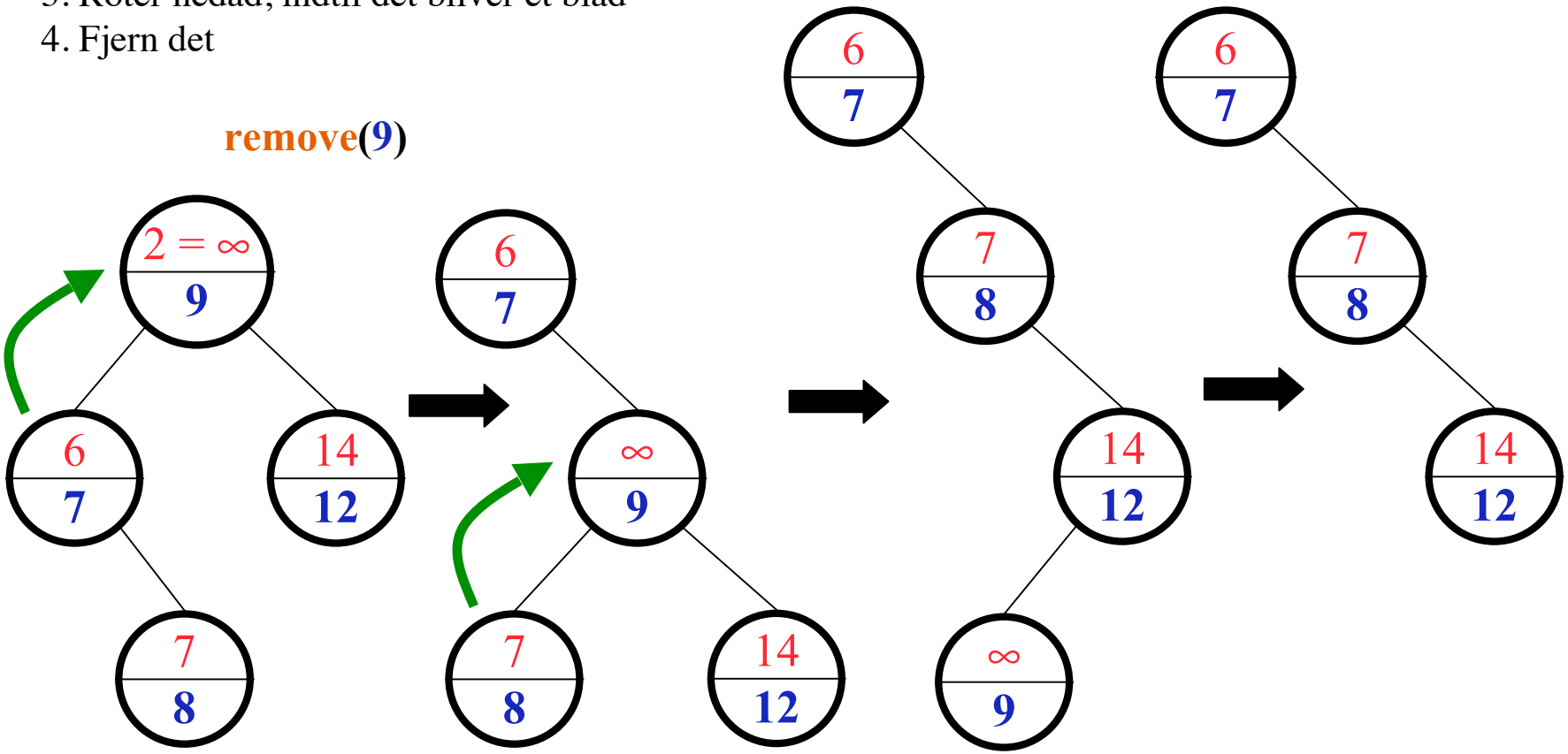
# Indsættelse

1. Vælg en tilfældig prioritet
2. Indsæt i det normale binære søgetræ
3. Roter opad, indtil hobbetingelsen er opfyldt



# Fjernelse

1. Find elementet, der skal fjernes
2. Sæt dets prioritet til ∞
3. Roter nedad, indtil det bliver et blad
4. Fjern det



# Implementering af en ordbog

Sammenligning af effektive implementationer

| | Søg | Indsæt | Fjern | Noter |
|---|---|---|---|---|
| Hashtabel | 1<br>forventet | 1<br>forventet | 1<br>forventet | • ingen ordning<br>• simpel at implementere |
| Skipliste<br>Treap | log ***n***<br>høj sands. | log ***n***<br>høj sands. | log ***n***<br>høj sands. | • randomiseret indsættelse<br>• simpel at implementere |
| (2,4)-træ<br>Rød-sort træ | log ***n***<br>værste<br>tilfælde | log ***n***<br>værste<br>tilfælde | log ***n***<br>værste<br>tilfælde | • svær at implementere |