MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR WISSENSCHAFTSGESCHICHTE
Max Planck Institute for the History of Science

2008

PREPRINT 349

Jens Høyrup

Über den italienischen Hintergrund der Rechenmeister-Mathematik

Über den italienischen Hintergrund der Rechenmeister-Mathematik

Jens Høyrup
jensh@ruc.dk
http://www.akira.ruc.dk/~jensh/

Beitrag zur Tagung
DIE RECHENMEISTER IN DER RENAISSANCE UND DER FRÜHEN NEUZEIT
STAND DER FORSCHUNG UND PERSPEKTIVEN
München, Deutsches Museum, 29. Februar 2008

Jeder, der sich für *abbaco*- und Rechenmeistermathematik interessiert, kennt die folgende konventionelle Weisheit – oder mindestens die groben Züge dieser (schon an sich grobgezeichneten) Geschichte:[1]

– 1202, mit Revision 1228, schrieb Leonardo Fibonacci seinen *Liber abbaci*, und 1220 seine *Pratica geometrie*.
– Ab etwa 1260 wurde ersterer, oder wurden beide, die Grundlage für die Entstehung der *abbaco*-Schule in den italienischen Handelsstädten.
– Im früheren 14. Jahrhundert gingen italienische *abbaco*-Meister in die Provence und lehrten dort die neue italienische Rechentechnik.
– Von dort entwickelte sich eine provenzalische Schule, deren Spuren wir bei Chuquet und Pellos und in Santcliments *Summa* finden.
– Ab Mitte des 15. Jahrhunderts lernten auch süddeutsche Mathematiker (Universitätsgelehrte, aber nicht nur) von den Italienern. Hier wurde eine algebraische Symbolik entwickelt.

Wie in jeder konventionellen Weisheit gibt es hier wahres – aber auch, wie so oft, wenn man genau untersucht, halbwahres und falsches. Ich werde im Folgenden versuchen, diese verschiedenen Kategorien zu unterscheiden – mit besonderem Gewicht auf meinen Untersuchungen der frühen *abbaco*-Mathematik, auf den Entwicklungen innerhalb der *abbaco*-Algebra im 14. und 15. Jahrhundert und auf den italienischen Spuren, die in der Frühphase der Rechenmeister-Algebra zu finden sind.

Der *Liber abbaci*

Im Vorwort zum *Liber abbaci* [ed. Boncompagni 1857: 1] erklärt Fibonacci, daß er nach seinen jugendlichen »einigen Tagen« im Unterricht in Bejaïa auf seinen Geschäftsreisen[2] in »Ägypten, Syrien, Griechenland, Sizilien und der Provence« sein Lernen von den »neun indischen Ziffern« (und, muß man vermuten, was dazu an Anwendungen gehörte) fortgesetzt hatte.[3] Keiner hat meines Wissens ernstlich gefragt, was Fibonacci in der Provence hat darüber

---

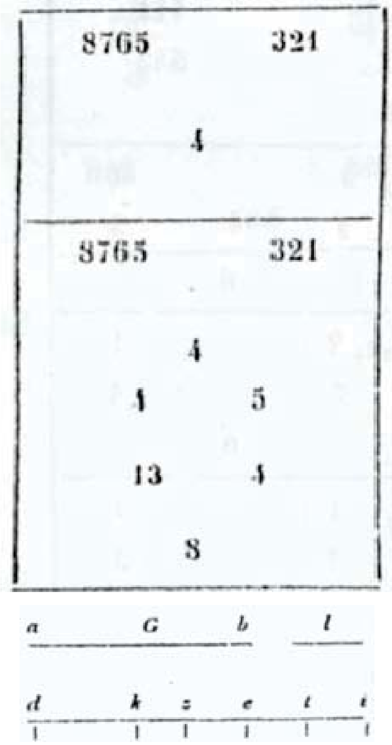
[1] Ich danke aufs herzlichste Bernhelm Booß-Bavnbek für freundliche und sorgfältige sprachliche Korrektur (“unter Berücksichtigung meiner persönlichen Vorliebe für die herkömmliche Orthographie”, wie er betont). Jeder, der mit sprachlicher Korrektur Erfahrungen hat, wird wissen, daß der Autor für noch bestehende sprachliche (wie selbstverständlich für alle anderen) Fehler und Unbeholfenheiten die Verantwortung trägt.

[2] Daß es sich fast allen Manuskripten zufolge wirklich um Geschäftsreisen und nicht nur um »Reisen nach Geschäftsplätzen« handelt, wird von Grimm [1976: 101*f*] gezeigt. Inhaltlich gibt es kaum einen Unterschied – warum sollte Fibonacci von Ägypten und Syrien als »Geschäftsplätzen« sprechen, wenn er nicht dorthin geschäftswegen gereist wäre? Beide Gegenden waren doch zu der Zeit (Kreuzzugszeit!) auch für ganz anderes bekannt.

[3] Hier, wir überall im Folgenden, sind Übersetzungen ohne identifizierten Übersetzer die meinigen. Wie gewöhnlich bemühe ich mich, lieber genau als schön zu übersetzen. Insbesondere lasse ich die Originale und nicht mein eigenes Stilgefühl bestimmen, ob eine Zahl als Subjekt das Verbum im Singular oder Plural nimmt.

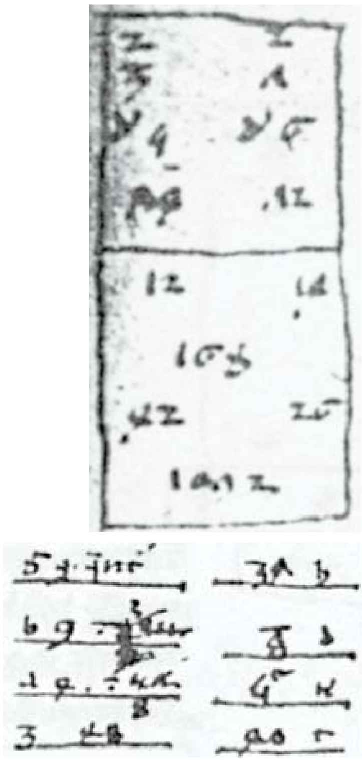
Bei Zitaten aus modernen Ausgaben von Quellentexten erlaube ich mir kleine Modifikationen auf der Ebene, wo die Herausgeber selbst modifizieren – Worttrennung, Diakritika, u.ä.

lernen können. Selber erzählt er von Aufgaben, die ihm in Konstantinopel gestellt worden sind [ed. Boncompagni 1857: 188, 190, 249]; die gehören sämtlich zu Typen, die er auch in der arabischen Mittelmeerwelt finden konnte und die wir später in den *abbaco*-Büchern finden.



Marginalia aus dem *Liber abbaci*

Weiter erwähnt Fibonacci, daß seine *regula recta* arabischen Ursprungs ist und daß auch der Name *regula elchatayn* (doppelter falscher Ansatz) arabisch ist [Boncompagni 1857; 191, 318]. Die *regula recta*[4] ist zweifellos mit der *regula* des *Liber augmenti et diminutionis* [ed. Libri 1838: I, 304–371, *passim*] identisch, und sowohl Fibonaccis rechteckig eingerahmte Zahlenschemata im Rand wie die Beweise mittels Buchstabentragender Liniendiagramme finden wir auch im *Liber mahamaleth*; vermutlich gab es sie also auch in arabischen *muʿāmalāt*-Schriften. Endlich wissen wir, daß Fibonacci auch die lateinischen Übersetzungen aus dem Arabischen benutzt hat – z.B., im *Liber abbaci*, Gherardos Übersetzung von al-Khwārizmīs Algebra [Miura 1981] – ohne viel darüber zu reden (vgl. [Folkerts 2006: IX]).



Marginalia aus dem *Liber mahamaleth*

Darüber hinaus ist natürlich Fibonaccis Quelle für seine Algebra (die weit über al-Khwārizmī hinausgeht) die arabische Disziplin; die »indischen Ziffern« hat er zuerst in Bejaïa gelernt; und mindestens die Notation für »aufsteigende Kettenbrüche«[5] hat er auch von der maghrebinischen Tradition übernommen, vielleicht auch andere Notationen für zusammengesetzte Brüche. Da er bei drei Aufgaben explizit erwähnt, daß sie von Byzantinern ihm gegeben worden sind[6], kann man auch vermuten, daß er die meisten anderen in der arabischen Welt gefunden hat – wenn nicht genau in der Form, die er bringt, dann jedenfalls als Typ. Es ist jedoch bemerkenswert, daß in allen Aufgaben, wo Konstantinopel erwähnt und von Geld gesprochen wird, die Münzeinheit der *bizantius* ist. Darf man daraus schließen, daß Aufgaben und Regeln,

---

[4] Gleichungsalgebra ersten Grades mit der Unbekannten *res*, die von Fibonacci jedoch nicht als *Algebra* bezeichnet wird.

[5] In dieser Notation steht z. B. $\frac{1\ \ 5\ \ 7}{2\ \ 6\ \ 10}$ für $\frac{7}{10}$ plus $\frac{5}{6}$ von $\frac{1}{10}$ plus $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{6}$ von $\frac{1}{10}$.

[6] Eine jedoch »von einem Meister in einer konstantinopolitanischen Moschee« (*a peritissimo magisto musco constantinopolotano*)[Boncompagni 1857: 249], also vielleicht von einem Muslim.

wo provenzalische Metrologie auftaucht, auch irgendwie von provenzalischer Inspiration sind? Und ähnliches betreffend Sizilien?

Viel weiter kommen wir nicht, solange wir nur den *Liber abbaci* allein betrachten.

Die ersten zwei *abbaco*-Bücher

Bis vor kurzem wurde als ältestes überlebendes *abbaco*-Buch der *Livero de l'abbecho* [ed. Arrighi 1989] angesehen. Aller Ansicht nach wurde das recht schöne Pergamentmanuskript (Florenz, Ricc., Ms. 2404, Fol. 1^{r}–136^{v}) in Umbrien geschrieben. Darlehensverträge mit Datierungen 1288–1290 im Text wurden von Van Egmond [1980: 156] als Grundlage für die Datierung »c. 1290, *i*[*nternal evidence*]« benutzt. Arrighi ist vorsichtiger und sagt nur [1989: 6], daß das Manuskript der Anlage nach aus der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts kommen dürfte.

Unmittelbar paßt dieses Manuskript zu der obenerwähnten konventionellen Weisheit. Es stellt sich [ed. Arrighi 1989: 9] als »secondo la oppenione de maiestro Leonardo de la chasa degli figluogle Bonaçie da Pisa« vor, »nach der Meinung des Meister Leonardo Fibonacci da Pisa«. Spätere *abbaco*-Schriften, die von Fibonacci nichts sagen, haben stattdessen mit diesem *Livero* vieles charakteristisches gemein, und man sollte demnach also annehmen können, daß auch sie (obwohl vielleicht weniger direkt) vom *Liber abbaci* herstammen. Dieses Gemeingut beginnt schon ganz am Anfang des *Livero* – nämlich mit der Präsentation des Dreisatzes:

> Wenn uns eine Aufgabe gesagt würde, in welcher drei Dinge vorgestellt wurden, dann sollen wir das Ding, daß wir wissen wollen, mit dem multiplizieren, daß nicht von derselben [Art] ist, und mit dem anderen teilen.[7]

Diese Formulierung kehrt mit kleineren Variationen in fast dem ganzen *abbaco*-Korpus wieder (steht aber nicht bei Fibonacci).

Die ganze Argumentationskette zerbricht jedoch, sobald man den *Livero* genauer zusammen mit dem *Liber abbaci* liest. Grob gesagt (alle Details finden sich in [Høyrup 2005]) gibt es im *Livero* zwei Ebenen. Auf der grundlegenden Ebene befindet sich alles, was zum Lehrplan der *abbaco*-Schule gehört; von diesem stammt überhaupt nichts von Fibonacci. Dann gibt es eine »raffinierte« Ebene, auf welcher sich Unterhaltungsaufgaben, komplizierte Umkehrversionen und ähnliches befinden. Hier stammen viele Aufgaben von Fibonacci – mehrmals mit Fehlern, die zeigen, daß der Kompilator des Textes nicht versteht was er kopiert.[8] *Was* der Kompilator

[7] »Se ce fosse dicta alchuna ragione ella quale se proponesse tre chose, sì devemo moltiplicare quilla chosa che noie volemo sapere con quella che non è de quilla medessma, a partire nell'altra«.

[8] So werden die zusammengesetzte Brüche Fibonaccis als gewöhnliche Brüche gelesen, was zeigt, daß der Kompilator nicht mitgerechnet hat. Fibonaccis alternative Lösungen mittels der *regula recta* werden meistens übersprungen, in einem Fall jedoch nur der Anfang (die Setzung der Unbekannten); im folgenden wird die unbekannte *res* demzufolge mit einem völlig sinnlosen nicht-algebraischen »Ding« (*cosa*) übersetzt. In einem Fall, wo Fibonacci [ed. Boncompagni 1857: 399] eine Aufgabe zweiten Grades (eine wiederholte Geschäftsreise mit Profit) mittels Proportionen in einem Liniendiagramm und *Elemente* II.6 löst, verschwinden in der Übersetzung alle Buchstaben-Hinweise, das Liniendiagramm und der Hinweis auf

kopiert, kopiert er aber sehr treu: manchmal wiederholt er die Querverweise des *Liber abbaci*, obwohl sie nicht mehr gültig sind.

Bekanntlich schreibt Fibonacci zusammengesetzte Zahlen auf arabische Weise – also nicht $69\frac{1}{3}$ sondern $\frac{1}{3}69$. In den Aufgaben, die er von Fibonacci übernimmt, tut der Kompilator des *Livero* dasselbe – nur fügt er gern die Einheit dazu, die von Fibonacci ausgelassen worden war.

In Aufgaben, die *nicht* vom *Liber abbaci* kommen, tut er was anderes. In den ersten Folien folgt er der Gewohnheit der Zeit und schreibt z. B. »libra 1, soldo 1, denari 10, $\frac{6}{7}$ di denaro«.[9] Dann plötzlich beginnt er, den Bruchteil links zu schreiben, aber ohne die herumstehenden Worte zu ändern – z. B. »libre 2, soldi 15, denari $\frac{8}{13}$ 4 de denaro«. Diese grammatisch unmögliche Struktur kann nur dadurch entstanden sein, daß der Kompilator eine Vorlage benutzt hat, wo stattdessen »... denari 4, $\frac{8}{13}$ de denaro« stand, und darin die arabische Schreibweise für gemischte Zahlen (ob von Fibonacci übernommen oder nicht) eingefügt hat. Daß wird auch dadurch bestätigt, das er gelegentlich die Änderung vergißt und die normale Schreibweise benutzt. Das nicht von Fibonacci stammende Material muß demnach von einem früheren *abbaco*-Text (vielleicht zusammen mit noch anderen Zuschüssen) kommen. Daß andere, spätere *abbaco*-Texte mit *diesem* Teil des Materials Ähnlichkeiten aufweisen, verbindet sie also keineswegs mit Fibonacci.

Dieselbe korrigierte Schreibweise findet sich auch in den Darlehensverträgen. Diese können also nicht vom Kompilator konstruiert sein; wie der Rest des Textes müssen sie aus einer Vorlage kopiert sein. Die Datierung 1288–90 ist damit nur *post quem*. Die vollständige Unkenntnis des Kompilators selbst der elementarsten Anfangsgründe der Algebra besagt jedoch, daß der Text kaum viel später als um etwa 1310 entstanden sein kann.[10]

Der sogenannte *Columbia Algorismus* (New York, Columbia University, Ms. X 511 A13) wurde von Kurt Vogel in [1977] ediert. Das Manuskript (von welchem mehrere Blätter verschwunden sind) ist eine Kopie, und auf Grundlage einer Münzliste datierte Vogel das Original auf die zweite Hälfte des 14. Jahrhunderts. Es ist jetzt einer italienischen Numismatikerin gelungen, die Münzen besser zu identifizieren, und es zeigt sich dadurch, daß die Liste mit großer Sicherheit stattdessen zwischen 1279 und 1284 zu datieren ist [Travaini 2003: 92]. Das erklärt sowohl die Präsenz vieler im 14. Jahrhundert nicht mehr geprägter Münzen wie die archaische Form der Ziffern [Vogel 1977: 12]. Es ist natürlich nicht auszuschließen, daß der Kompilator des Textes eine schon alte Münzliste verwendete, aber (mit Blick darauf, was sonst gemacht wurde) auch nicht sehr wahrscheinlich. Angesichts der Ziffer-Formen ist damit eine Datierung des Originals (nicht der uns bekannten Kopie) auf etwa 1285 zu vermuten.

Der *Columbia Algorismus* wird dadurch vermutlich der früheste *abbaco*-Text, den wir

---

die euklidische Proposition.

[9] Ed. [Arrighi 1989: 16]. Abkürzungen sind aufgelöst, Interpunktion (und in späteren Zitaten auch Diakritika) sind modern.

[10] Das Manuskript, scheinbar eine *de luxe* Kopie, mag noch später zu datieren sein. Das ist aber für die hiesige Diskussion belanglos.

besitzen. Er ist deshalb schon dadurch interessant, daß er keine Spur von Einfluß von Fibonacci aufzeigt – aber jedoch noch interessanter dadurch, daß er in mehreren Punkten mit iberischem Material verbunden zu sein scheint.[11]

Unzweifelhaft unter diesen Punkten ist die Behandlung des Dreisatzes. In sämtlichen mir bekannten iberisch-provenzalischen Schriften vom *abbaco*-Typ wird dieser durch rein abstrakte oder gar kontrafaktische Zahlenaufgaben eingeführt. Der kastilianische *Libro de arismética que es dicho alguarismo*[12] (eine Kopie von 1393 einer älteren Vorlage) identifiziert den Aufgabentypus durch die Wendung »sy tanto faze tanto, ¿qué sería tanto«, und gibt danach als erstes Beispiel »sy 3 fuesen 4, ¿qué seria 5?«. Der *Traicté de la praticque de algorisme*[13] redet zwar von »regle de troyz«, und gibt die allgemeine Regel »multiplie ce que veulz savoir par son contraire et puiz partiz par son semblant« – ziemlich ähnlich dem, was wir im *Livero* getroffen haben. Das erste Beispiel ist jedoch in abstrakten Zahlen, »se 6 valent 18, que vauldront 9?«. Das *Compendy de la praticque des nombres* de Barthélemy de Romans [ed. Spiesser 2003: 256*f*] sagt nichts von »regle des troyz«, hat aber auch dieselbe allgemeine Regel und das Beispiel »si 5 valent 7, que valent 13?«. Jacques Sesianos Exzerpte [1984: 45] aus dem »Pamiers Algorismus« (etwa 1430) zeigen nicht, wie von der Regel gesprochen wird, erzählen jedoch, daß die ersten Beispiele vom Typus »$4\frac{1}{2}$ valent $7\frac{2}{3}$, que valen $13\frac{3}{4}$?« sind. Francesc Santcliments katalanische *Summa de l'art d'aritmética* von 1482 [ed. Malet 1998: 163] und Francés Pellos' in Nizza geschriebenes *Compendion de l'abaco* von 1492 [eds Lafont & Tournerie 1967: 101–103] sprechen beide vom Dreisatz (»regla de tres« bzw. »regula de tres causas«) und von *semblant* und *dissemblant*/*contrari* und haben auch beide Einführungsbeispiele von der erwähnten Art; Santcliment erklärt, daß *en nostre vulgar*, »in unserer [katalanischen] Volkssprache«, wird davon mit der Wendung »si tant val tant: que valra tant« gesprochen. Chuquet [ed. Marre 1880: 632], in Lyon und vermutlich 1484 schreibend und auch von der »rigle de troyz« redend, gibt eine gründlichere theoretische Erklärung (er hatte ja sowohl das Artes- wie das Medizinstudium durchgeführt). Er erklärt hier, daß die Aufgabe im Auffinden der vierten Proportionale besteht und daß die erste und die dritte Zahl von derselben Gattung sind und die zweite und vierte von einer anderen.[14] Sein Einführungsbeispiel bleibt jedoch

[11] Er ist übrigens auch mit dem *Livero* verbunden und also mit dessen nicht-Fibonacci-Quelle(n). Eine Aufgabe des *Livero* [ed. Arrighi 1989: 119*f*] handelt von zwei Sorten von schmutziger Wolle, die beim Waschen verschieden schrumpfen. Dieselbe Aufgabe – mit denselben sehr charakteristischen numerischen Parametern (378, 217, 4089) und mit einigen charakteristischen erklärenden Bemerkungen – findet sich im *Columbia Algorismus* [ed. Vogel 1977: 83*f*]. Die Formulierungen (z. B. der verschiedene Zugang zum Dreisatz) schließen direkte Abschrift aus.

[12] Ed. Caunedo del Potro, in [Caunedo del Potro & Córdoba de la Llave 2000: 147].

[13] Ed. [Lamassé 2007: 469]. Im selben Kodex wie das *Compendy de la praticque des nombres* von Barthélemy de Romans enthalten und vielleicht auch von ihm verfaßt. Auf jeden Fall aus demselben franco-provenzalischen Umfeld und aus der frühen zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts.

[14] »Et sont tousiours le premier et le tiers semblans et dune condicion et le second et le quart entre eulx deux sont semblans et dune nature et dissemblans et contraires aux aultres deux«. Das stimmt natürlich

von derselben Art wie bei den provenzalischen Vorgängern: »se 8 valent 12, que vauldront 14?«, wo es unter den Zahlen *keinen* Gattungsunterschied gibt.

Dieser Gegensatz zwischen Regel und Beispiel, der also in allen den erwähnten provenzalischen Schriften und auch in Santcliments *Summa* zu finden ist, erklärt sich wohl nur, wenn man ihn als Ergebnis eines Zusammenstoßes sieht – Zusammenstoß nämlich zwischen der gewöhnlichen, oben aus dem *Livero* zitierten Struktur (wo die ersten Beispiele entweder von zwei verschiedenen Münz-Sorten oder von Preis gegen Ware handeln) und derjenigen, die wir im *Libro de arismética que es dicho alguarismo* und als *nostre vulgar* bei Santcliment finden. *Genau diesen iberischen Zugang zum Dreisatz hat auch der Columbia Algorismus.*

Eine (dem Leser zugeschriebene) Formulierung »soviel für soviel, wieviel für soviel« findet sich auch bei al-Qurašī (11. Jahrh., vermutlich Damaskus) [ed., übers. Rebstock 2001: 64] als erste Einführung des Dreisatzes, dann genauer mit einem Hinweis auf die gewöhnliche arabische Terminologie von Ware und Preis erklärt und schließlich mit einem (bei »gelehrten« arabischen Mathematikern wie al-Khwārizmī, Abū Kāmil, al-Karajī und ibn al-Bannā᾿ geläufigen) Hinweis auf *Elemente* VII vorgestellt. Das darauf folgende erste Beispiel ist auch in reinen Zahlen, aber an den Euklid-Hinweis geknüpft und deshalb unentscheidend. Auf jedem Fall deutet jedoch die iberische Formulierung auf eine Verbindung zu einem Faden in der arabischen mathematischen Kultur, der keinen Einfluß in Italien gehabt hat – einem Faden, der nicht in den Schriften der gelehrten arabischen Mathematiker zu entdecken ist.

Die andere am Zusammenstoß beteiligte Struktur, d. h. diejenige, die aus dem *Livero* zitiert wurde, mag die Provence aus Italien erreicht haben. Sicher ist das jedoch nicht. Der Name *Regel von drei* wird auch von mehreren Sanskrit-Mathematikern verwendet,[15] und obwohl mir bekannte arabische Quellen ihn nicht benutzen, muß er wohl irgendwie – vermutlich durch arabische Kaufmannskultur – vermittelt worden sein. Der Hinweis auf ähnliches und nicht-ähnliches taucht als sekundäre Erklärung bei sowohl Sanskrit- wie arabischen Autoren auf,[16] also erneut als Hinweis auf irgendwie – und wieder wohl aus der Kaufmannskultur – bekanntes. Ob die Provenzalen von den Italienern oder direkt von deren Quelle gelernt haben, ist kaum zu entscheiden (wir werden sehen, daß in diesem Punkt die Italiener nicht von den Provenzalen gelernt haben können).

Vielleicht nicht ganz so sicher wie die durch den Zugang zum Dreisatz nachgewiesene Verbindung zwischen *Columbia Algorismus* und *Libro de arismética* ist diejenige, die eine einzelne Aufgabe anzeigt. Ersterer [ed. Vogel 1977: 122] hat

---

nicht mit euklidischen Proportionen, wo die erste und die zweite Zahl von derselben Gattung sein müssen – sonst haben sie ja kein Verhältnis – und ebenso die dritte und die vierte. Chuquet hat seine Erklärung mittels Proportionentheorie und seinen Hinweis auf die traditionelle Formulierung schlecht kombiniert.

[15] Nämlich Āryabhaṭa [ed., übers. Elfering 1975: 140], Brahmagupta [ed., übers. Colebrooke 1817: 283], und Mahāvīra [ed., übers. Raṅgācārya 1912: 86].

[16] Brahmagupta [ed., übers. Colebrooke 1817: 283]; Mahāvīra [ed., übers. Raṅgācārya 1912: 86]; ibn al-Bannā᾿ [ed., übers. Souissi 1969: 88]; al-Qalaṣādī [ed., übers. Souissi 1988: 67]; ibn Thabāt [ed., übers. Rebstock 1993: 45].

> Einer hatte Geld in der Tasche, und wir wissen nicht wieviel. Der $\frac{1}{3}$ und der $\frac{1}{5}$ entfiel, und es blieb ihm 10 denari. Ich frage, wie viele denari er zuerst hatte, bevor ihm der $\frac{1}{3}$ und der $\frac{1}{5}$ entfielen. Dies ist seine rechte Regel, daß wir sagen sollen {worin wir sagen sollen}, worin findet sich $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$, die sich in 3 mal 5 findet, das heißt 15. Und also soll man sagen, daß er in der Tasche 15 denari hatte. Entferne den $\frac{1}{3}$ und den $\frac{1}{5}$ von 15, es entkommt 7. Sage so, wenn 7 10 wäre, was würde 15 sein? Sage, 10 mal 15 machen 150, zu teilen durch 7, es kommt daraus 21 $\frac{3}{7}$, und so viele denari hatte er in der Tasche, bevor ihm der $\frac{1}{3}$ und der $\frac{1}{5}$ entfielen.[17]

In dem *Libro de arismética* (ed. Caunedo del Potro, in [Caunedo del Potro & Córdoba de la Llave 2000: 167]) bleiben nur 5 denari, und die Geschichte wird in der ersten und zweiten, nicht der dritten Person erzählt; abgesehen davon finden wir eine etwas gekürzte aber sonst ganz treue Wiederholung:

> Der $\frac{1}{3}$ und der $\frac{1}{5}$ entfällt mir aus dem Beutel, und es blieben darin 5 dineros. Ich frage, wie viele dineros hatte ich zuerst darin? Dies ist seine rechte Regel und Rechnung, daß du sagen sollst, worin finden sich $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$, nämlich in 15. Sagen wir jetzt, daß du 15 dineros in deiner Tasche hattest, es entfielen dir den $\frac{1}{3}$ und den $\frac{1}{5}$ von 15, es bleiben dir 7. Sage, wenn 7 5 wäre, was würde 15 sein? Sage, 5 mal 15 sind 76 (*sic*), teilen durch 7, es kommen dir 10 $\frac{5}{7}$, und so viele dineros hatte ich zuerst im Beutel.[18]

Da der *Columbia Algorismus* nicht weit verbreitet war (wir kennen nur diese einzige Kopie), und kein anderes italienisches *abbaco*-Buch den Dreisatz mittels der kontrafaktischen Struktur identifiziert,[19] können wir eine italienische Quelle für die Formulierung im *Libro de arismética* ausschließen. Eine gemeinsame iberische Quelle für beide Texte ist viel glaubhafter.

Betreffend des *Columbia Algorismus* kann man hinzufügen, daß er einige Male die schon

---

[17] »Uno avia denari in borscia e'nno sapemo quanti. Cadessi lo $\frac{1}{3}$ ⟨e lo $\frac{1}{5}$⟩ e romaseli 10 denari. Adomando, quanti denari avea in prima innatti che'lli chadessaro lo $\frac{1}{3}$ e lo $\frac{1}{5}$? Questa la sua ricta reghola, che noi dovemo dire, {in che noi dovemo dire}, in che'ssi trova $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, che'ssi trova in 3 via 5, cioiè 15; e chossì si deve dire che lo avesse in borscia 15 denari. Leva lo $\frac{1}{3}$ e lo $\frac{1}{5}$ di 15, chanparia 7. Di' chossì: se 7 fosse 10, che serria 15? Di', 10 via 15 fanno 150, a'ppartire per ⟨7⟩, e che ne viene 21 $\frac{3}{7}$, e chotanto denari avea in borscia enanti che'lli chadesse lo $\frac{1}{3}$ e lo $\frac{1}{5}$.«

[18] »El $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$ de los mis dineros se me cayeron de la limosnera e fincaron en ella 5 dineros, demando, ¿quántos dineros avía en ella primeramente?, esta es la sua derecha regla e cuenta, que tú debes dezir ¿en qué se fallan 3 e 5?, que es en 15, digamos agora que tú ovieses 15 dineros en tu bolsa, cayósete el $\frac{1}{5}$ y el $\frac{1}{3}$, fincáronte 7, di sy 7 fuesen 5 ¿qué serian 15?, di 5 vezes 15 son 75, parte por 7 e viénente 10 $\frac{5}{7}$ e tantos dineros avía primerament en la limosnera.«

[19] Kontrafaktische Aufgaben finden sich zwar ziemlich häufig in den *abbaco*-Texten – selbst *kontrafaktische Rechnungen* vom Typus »wenn 5 mal 5 26 wäre, sage mir, wieviel würde 7 mal 7 machen an dieser selben Rate?« (Jacopo da Firenze, ed. [Høyrup 2007b: 238]) – aber diese kommen entweder abgetrennt vom Dreisatz vor, oder stehen als sekundäre Beispiele davon – s. [Høyrup 2007b: 64–67]. Vom *Columbia Algorismus* abgesehen wird der Dreisatz nie von Italienern durch die kontrafaktische Struktur bestimmt.

Schon im *Liber abbaci* [ed. Boncompagni 1857: 170] kommen sowohl eine einfache kontrafaktische Aufgabe als eine kontrafaktische Berechnung vor; Fibonacci liebt sie aber nicht und sorgt sofort dafür, eine mathematisch ordentliche Erklärung zu geben. Er kann also nicht der Erfinder sein, und schon zu seiner Zeit müssen solche Aufgaben also zirkuliert haben.

erwähnte Notation für aufsteigende Kettenbrüche benutzt – einmal wie bei Fibonacci von rechts nach links zu lesen, einandermal von links nach rechts [Vogel 1977: 13]. Wie wir auch später sehen werden, war Fibonacci also nicht die einzige Quelle für die Maghreb-Notationen. Ob der Kompilator des *Livero* die Idee für seine merkwürdige Schreibweise für benannte gemischte Zahlen seiner Fibonacci-Lesung zu danken hat oder die Inspiration von anderswoher kommt, ist also nicht zu entscheiden.

»Wir sagen«

Sowohl der *Columbia Algorismus* als der *Libro de arismética* benutzt in der gerade zitierten Aufgabe einen echten falschen Ansatz. Ähnliches machen fast alle *abbaco*-Bücher. Sie unterscheiden sich dadurch von Fibonacci, der auch hier keine Falschheit in der Mathematik mag. Er tut stattdessen folgendes [ed. Boncompagni 1857: 173]:

> Es gibt einen Baum, dessen $\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}$ sich unter Erde befindet; und die sind 21 Handbreiten. Es wird gefragt, wieviel sei die Länge dieses Baumes. Weil $\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}$ sich in 12 finden, verstehe denselben Baum als in 12 gleich große Teile geteilt. [...][20]

Er findet dann, daß $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ dieser Teile 12 Teile, also 7 Teile, gleich 21 Handbreiten sind, u.s.w. Er fährt fort:

> Es gibt aber eine andere Methode, die wir benutzen, nämlich daß du für das unbekannte Ding eine bekannte, frei gewählte Zahl setzt, die ganzzahlig von den Brüchen geteilt wird. [...][21]

Fibonacci benutzt nicht den Verfasser-Plural. Sein »wir« ist immer er selber zusammen mit dem Leser oder (wie hier, wo der Leser als lernender das Erklärte noch nicht wissen soll) irgendeine andere Gruppe, zu der Fibonacci sich selber rechnet.

Ähnliches finden wir in der Legierungsrechnung. In vielen *abbaco*-Büchern beginnen Legierungsaufgaben oft im Stil »Ich habe Silber, das *n* Unzen per Pfund enthält«[22] – so tut auch der *Livero*, aber nicht die von Fibonacci übernommenen Legierungsaufgaben, wie auch nie die Legierungsaufgaben des *Liber abbaci*. In einer einleitenden allgemeinen Erklärung [ed. Boncompagni 1857: 143] sagt Fibonacci aber »wenn wir sagen, “ich habe Münzmetall von so und so vielen Unzen”, sagen wir von 2, verstehen wir, daß in einem Pfund desselben Münzmetalls 2 Unzen Silber enthalten sind«.[23] Ob diesmal der Leser mitgerechnet sei, ist vielleicht nicht klar (s. gleich unten), da aber kein vorhergehendes Argument zur Aussage führt, muß

---

[20] »Est arbor, cuius $\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}$ later sub terra; et sunt palmi 21: queritur quanto sit arboris illius longitudo: quia $\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}$ reperiuntur in 12, intellige ipsam arborem esse in partes 12 equales divisam. [...]«.

[21] »Est enim alius modus quo utimur, videlicet utponas pro re ignota aliquem numerum notum ad libitum, qui integraliter dividatur per fractiones. [...]«.

[22] Mehrere Beispiele werden in [Høyrup 2007b: 125] erwähnt. Außer in *abbaco*-Büchern findet man die Struktur in Pegolottis *Pratica di mercatura* [ed. Evans 1936: 342–357] aus dem frühen 14. Jahrhundert.

[23] »Et cum dicimus; habeo monetam ad uncias quantaslibet, ut dicamus ad 2, intelligimus quod in libra ipsius monete habeantur uncie 2 argenti«.

Fibonacci jedenfalls *auch* an eine weitere Gruppe gedacht haben. Nochmals zitiert Fibonacci also eine schon verbreitete Redeweise. *Wie* verbreitet sehen wir wenig später [ed. Boncompagni 1857: 160]: Fibonacci reduziert hier eine Aufgabe vom Typus »Fauler Arbeiter« zu einer Legierungsaufgabe, und introduziert letztere mit den Worten: »Ich habe Münzmetall von 26 und von 37. [...]«/»habeo monetam ad 26 et ad 37 [...]«. Obwohl er selber diese Struktur nicht benutzt, erwartet er also vom Leser, daß er in dieser Einkleidung eine Legierungsberechnung erkennt.

Dieselbe Struktur findet sich einmal in einem kastilianischen Kaufmannshandbuch,[24] und auch in einem byzantinischen Rechenbuch aus dem frühen 14. Jahrhundert (Ψηφηφορικὰ ζητήματα καὶ προβλήματα, »Berechnungsfragen und -Aufgaben«) [ed. Vogel 1968: 21–27], das (nach der benutzten Metrologie zu urteilen) nicht von der jungen italienischen Tradition sehr geprägt sein kann. Hier wird die erste Person Singular auch für andere Aufgabentypen benutzt – hauptsächlich, aber nicht ausschließlich, für solche, die mit Bezahlung in Goldwährung zu tun haben. Auch Paolo Gherardi, Italiener aber in Montpellier 1328 schreibend, benutzt häufig die erste Person Singular in Aufgaben, die mit Gold, aber nicht immer mit Legierung zu tun haben. Man kann vermuten, aber kaum beweisen, daß die Gewohnheit von byzantinischen Geldwechslern stammt. Jedenfalls war sie zur Zeit Fibonaccis diesem schon bekannt und ein Jahrhundert später also im ganzen christlichen Mittelmeergebiet verbreitet.

Schließlich bezeichnen gewisse *abbaco*-Bücher die Annäherung $\sqrt{(n^2+a)} \approx n+\frac{a}{2}n$ als “die nächste” Wurzel (*la più pressa*). Dieselbe Bezeichnung (*radix quam propius potest*) verwendet Fibonacci in der *Pratica* – weder im Allgemeinen noch das erste oder zweite Mal, daß er diese Annäherung macht, sondern einmal in einer versteckten Ecke, scheinbar als Hinweis auf Bekanntes [ed. Boncompagni 1862: 27].

Die zweite Generation: Italiener in der Provence

Abbaco-Schulen gab es spätestens seit 1265 [Ulivi 2002: 224]. Spätestens seit 1265 muß es also auch *abbaco*-Verfasser gegeben haben – da ihre Schriften aber sämtlich verschollen sind, können wir sie als eine »nullte« Generation betrachten. Die »erste Generation« wird dann von dem *Columbia Algorismus* und dem *Livero* repräsentiert. Als »zweite Generation« können wir die Texte betrachten, die zwischen 1305 und 1340 geschrieben sind.

Ein besonderer Text aus dieser zweiten Generation ist ein *Liber habaci* (Florenz, Magl. XI, 88, Fol. 1^r–40^v, ed. [Arrighi 1987b: 109–166]).[25] Außer mathematischem enthält der Text Kalender- und historisches Material und eine Münzliste. Zusammengenommen erlaubt das eine Datierung um 1310 [Van Egmond 1980: 115].

Der Text ist mit großer Wahrscheinlichkeit in der Provence geschrieben [Arrighi 1987b:

---

[24] »E si te dixeren, yo tengo de tres suertes plata, la una suerte es de 1 marco, 7 onças $\frac{1}{3}$ de onça de plata fina [...]«. Real Academia Española, Ms. 155, *De arismetica* Fol. 151^r [Caunedo del Potro 2004: 45].

[25] Arrighi schreibt den Text dem in 1328 in Montpellier aktiven Paolo Gherardi zu, gibt aber keine guten Gründe dafür.

10]: Erstens kommen provenzalische Lehnwörter vor; zweitens registriert der Kalender die Tage von Heiligen, die dort besonders wichtig waren.

Trotz der Datierung mag dieser Text ein Zeuge der »nullten Generation« sein. Alle ganzen Zahlen sind (selbst im kurzen Abschnitt, wo das Stellenwertsystem erklärt wird) mit römischen Ziffern und alle Brüche mit Worten geschrieben. Die Einführung des Dreisatzes (ganz am Anfang) läuft so:

> Se ci fosse detta alchuna ragione nella quale si proponesse tre chose, sì dobbiamo multipricare quella chosa che'nnoi volglamo sapere contr'a quella che'nnonn'è de quella medesima e partire nell'altra

– *genau* wie im *Libero*, von orthographischen Unterschieden und Multiplikation *contra* statt *con* abgesehen. Das sollte uns daran erinnern, daß die Verwendung von hindu-arabischen Ziffern und der Rechenunterricht mit Aufgaben und metrologischen Umsatzregeln in der *abbaco*-Schule in keiner prinzipiell notwendigen Verbindung standen. Es ist voll denkbar, daß die frühesten *abbaco*-Meister römische Ziffern verwendet haben und daß das hindu-arabische System erst von der »ersten Generation« erworben wurde.[26]

Drei andere *abbaco*-Texte der zweiten Generation sind mit Sicherheit in der Provence geschrieben: Jacopo da Firenzes *Tractatus Algorismi* (Montpellier 1307),[27] Paolo Gherardis *Libro di ragioni* (Montpellier, 1328)[28] und der anonyme *Trattato di tutta l'arte dell'abbacho*

---

[26] Voll denkbar, aber selbstverständlich nur eine Möglichkeit – der *Liber habaci* mag auch zu seiner eigenen Zeit eine bloße Merkwürdigkeit gewesen sein.

[27] Insgesamt drei Manuskripte repräsentieren den *Tractatus* des Jacopo: (a) Vatikan, Vat. Lat. 4826; (b) Milano, Trivulziana Ms. 90; und (c) Florenz, Ricc. Ms. 2236. (a) ist durch Wasserzeichen auf etwa 1450 datierbar; (b) ähnlicherweise auf etwa 1410; (c) ist undatiert (Van Egmond [1980: 148] wiederholt nur das allen drei Manuskripten gemeinsame »1307« und ist also als Manuskriptdatierung sinnlos). Da (c) mit (b) eng verwandt aber etwas schlechter ist, ist auch für sie eine Datierung zur ersten Hälfte des 15. Jahrhunderts plausibel, aber weder zwingend noch wichtig.

Eine genaue Analyse der drei Manuskripte [Høyrup 2007b: 5–25 und *passim*] zeigt, daß (b) und (c) eine revidierte Fassung des ursprünglichen Textes repräsentieren, vermutlich eine Anpassung zum gewöhnlichen Lehrgang der *abbaco*-Schule, wo die Algebra und eine abschließende Sammlung gemischter Aufgaben eliminiert und einige Aufgaben (z. B. mit »welscher Praktik«, also markthandelsnah) hinzugefügt sind. (a) dagegen ist eine sorgfältige Kopie einer sorgfältigen Kopie, und diese Sorgfältigkeit scheint durch die ganze Kette bis zum Ursprung zu gehen. Wir können mit ziemlicher Ruhe (a) als eine gute Kopie des Originals betrachten.

Eine Ausgabe von (a) mit einer englischen Übersetzung und eine kritische Ausgabe von (b) und (c) finden sich in [Høyrup 2007b]. Eine vorläufige Ausgabe von (a) ist auf dem Netz zugänglich ([Høyrup 1999] = http://www.akira.ruc.dk/~jensh/Publications/1999%7Bc%7D_Jacopo-Tractatus_transcription.pdf). Ebenfalls auf dem Netz liegt ein Vorabdruck der kritischen Ausgabe von (b) und (c), [Høyrup 2007a] = http://www.ruc.dk/filo/Skriftserien/3_2007_2_Jens.PDF.

[28] Ed. [Arrighi 1987b: 15–107]. Wie Van Egmond [1978: 162] bemerkt, ist das Manuskript eine (fehlerhafte) Kopie eines verlorenen Originals. Das Kolophon (und damit die Datierung und die Autorangabe) scheinen jedoch vom Original zu stammen (Jacopos Kolophon findet sich unverändert in allen drei Manuskripten).

(Avignon, um 1334).[29]

Sowohl Jacopo als Gherardi behandeln Algebra, und einige algebraische Aufgaben finden sich zerstreut in den letzten Folien des Florenz-Manuskriptes des *Trattato*. Diese Neuerwerbung ist sicherlich der schlagendste Unterschied zwischen der ersten und der zweiten Generation.

Daß es sich wirklich um eine Neuerwerbung handelt muß natürlich begründet werden. Ich habe die Frage anderswo im Detail diskutiert [Høyrup 2006] und werde deshalb hier nur die gröbsten Linien des Arguments vorlegen.

Im Anfang von Jacopos Behandlung der Algebra fehlt vermutlich ein Blatt – sie fängt ohne Überschrift, Einleitung und Regeln für Multiplikation von Vorzeichen und Potenzen an, direkt mit den Lösungsregeln für die algebraischen »Fälle«. Sonst ist sie recht ordentlich. Sie präsentiert die sechs Fälle ersten und zweiten Grades in einer Ordnung, die in fast allen späteren *abbaco*-Algebren beibehalten wird, bis Pacioli [1494: 145^{v}–146^{r}] zur Ordnung Fibonaccis zurückkehrt.[30] Für jeden dieser Fälle kriegen wir sowohl die Lösungsvorschrift wie ein oder mehrere Beispiele (für den Fall mit Doppellösung drei Beispiele – eines wo Addition taugt, eines wo Subtraktion taugt, und eines, wo nachgewiesen wird, daß beide taugen). Die Fälle sind sämtlich in nicht-normalisierter Form definiert, und die Vorschriften fangen alle (unterschiedlich von den vorhergehenden lateinischen Algebren, Übersetzungen sowohl als Fibonacci) mit einer Normalisierung an; das bleibt die Gewohnheit der späteren *abbaco*-Algebra. Fünf der zehn Beispiele handeln von abstrakten Zahlen,[31] die anderen fünf sind eingekleidet als (pseudo-)Handelsrechungs-aufgaben.[32] Kein einziges bezieht sich direkt (wie gewöhnlich bei den ersten Beispielen in den

---

[29] Für diese Datierung s. [Cassinet 2001]. Ich habe die Manuskripte Florenz, Bibl. Naz. Centr., fond. princ. II,IX.57 und Rom, Acc. Naz. dei Lincei, Cors. 1875 benutzt. Das erste scheint die Entwurfversion des Autors zu sein, das zweite stammt von etwa 1340. Van Egmond [1977: 19; 1980: 140, 179] schreibt das Traktat dem Paolo dell'Abbaco zu, gibt aber seine Gründe nicht an. Die *möglichen* Gründe, die ich finden kann, haben kein Gewicht, s. [Høyrup 2007b: 54 N. 144]. Zum Beispiel enthält das Manuskript Florenz, Ricc. 2511 von etwa 1340–50 zuerst eine anonyme Version des *Trattato di tutta l'arte* und danach die »Regoluzze di maestro Pagholo astrolagho« [Van Egmond 1980: 158] – ein ziemlich guter Beweis, daß der Kompilator dieses einzigen Manuskriptes aus dem 14. Jahrhundert, wo die zwei Werke zusammen enthalten sind, überzeugt war, daß der *Trattato nicht* von Paolo verfaßt sei. Außerdem (vgl. unten) gibt Paolo in den *Regoluzzen* [ed. Arrighi 1966: 32] nur die Regel für die Umkreisberechnung aus dem Kreisdurchmesser, was überhaupt nicht zu dem *Trattato di tutta l'arte* paßt – s. unten Text vor Note 39.

[30] Vor Pacioli habe ich drei Ausnahmen bemerkt. Eine ist Gilio di Siena (1384, ed. [Franci 1983: 22–25]. Er hat für die ersten drei (»einfachen«) Fälle die gewöhnliche *abbaco*-Ordnung, für die drei »zusammengesetzten« die Ordnung Fibonaccis. Die zweite ist Benedetto da Firenze [ed. Salomone 1982], der Fibonaccis Ordnung folgt. Die dritte ist Florenz, Bibl. Naz., Palatino 575 ([ed. Simi 1992], etwa 1460), die für die grundlegenden 6 Fälle zuerst al-Khwārizmī kopiert (mit *radice* statt *cosa*; auch die geometrischen Beweise werden reproduziert). Danach kommen in der gewöhnlichen *abbaco*-Ordnung dieselben Regeln, jetzt mit *cosa* formuliert.

[31] In dreien davon wird die Zahl 10 in zwei Teile zerlegt, in zweien wird nach zwei Zahlen in gegebener Proportion gefragt.

[32] In der Reihenfolge: Gesellschaftsrechnung, Verzinsung, »Geben-und-Nehmen« (mit Quadratwurzel von echtem Geld), Gewinn auf Geschäftsreisen, Geldwechsel.

lateinischen Algebren) auf *censo* und *cosa* (*radice*/»Wurzel« als Name der Unbekannten ersten Grades benutzt Jacopo überhaupt nicht, und auch nach ihm kommt sie sehr selten vor). Nach den sechs traditionellen Regeln folgen ohne Beispiele 14 (korrekte) Regeln für homogene und reduzierbare Fälle dritten und vierten Grades[33] – zwei mögliche biquadratische Fälle fehlen am Ende, sonst ist die Liste komplett. Jede Abkürzung für algebraische Kernbegriffe (*cosa*, *censo*, *più*, *meno*[34]) wird vermieden, als ob Jacopo sich bewußt wäre, neues vorzulegen, wo der Leser außer Stande sein würde, aus gekürztem das volle Wort zu erraten (er sagt ausdrücklich, daß sein Buch auch für Selbststudium gemeint ist [ed. Høyrup 2007b: 196]). Formale Rechnungen (z. B. Brüche, wo im Zähler oder Nenner algebraische Ausdrücke stehen) kommen nicht vor. Keine einzige der Aufgaben kommt von Fibonacci (noch von den ins Lateinische übersetzten arabischen Algebra-Schriften).

Gherardi wiederholt die sechs ersten Fälle und die meisten von Jacopos Fällen dritten Grades – den vierten Grad betrachtet er nicht. Dazu fügt er eine Anzahl nicht-reduzierbarer Fälle dritten Grades, für welche er falsche Regeln gibt (z. B. löst er den Fall »Kuben gleich Dinge und Zahl« mit der Regel für »*Censi* gleich Dinge und Zahl«), und endlich auch den Fall »*cubi* gleich Wurzel von Zahl«. Sämtliche seiner Fälle sind mit einem Beispiel versorgt (nie mit mehreren). Die meisten seiner Beispiele für die ersten sechs Fälle stimmen mit Jacopo überein.[35] Die Fälle dritten Grades sind alle von der folgenden Art [ed. Arrighi 1987b: 105]:

> Finde mir 3 Zahlen, die gegenseitig sich wie 2 zu drei und wie 3 zu 4 verhalten, und wenn die erste mit sich selber und dann mit der [selben] Zahl multipliziert wird macht es soviel als wenn die zweite mit sich selber multipliziert wird, und die dritte dazu gelegt wird, und dann 12 dazu gelegt wird.[36]

Jacopo hat zwei Aufgaben dieser Art, und sie ist also nicht Gherardis Erfindung. Sie wird auch sehr von Dardi (siehe unten) benutzt. Da die Zetetik (»in-Gleichung-Setzen«) immer dadurch geschieht, daß (im gegebenen Beispiel) die erste Zahl als 2 Dinge, die zweite als 3 Dinge, und die dritte als 4 Dinge gesetzt wird, ist es klar, daß die Einkleidung dazu dient, auf einfache Weise ein Beispiel für eine Polynomialgleichung zu schaffen, die komplizierter aussieht als die Gleichung selbst ohne es wirklich zu sein.

---

[33] Solches ist natürlich nicht neu, wenn aus der Sicht arabischer Algebra betrachtet, sondern mindestens seit al-Karajī wohl bekannt – s. z. B. die Paraphrase vom *Fakhrī* in [Woepcke 1853: 71*f*]. Unter den gelehrten arabischen Algebraikern ist al-Karajī tatsächlich derjenige, an den manche Aspekte der *abbaco*-Algebra erinnern. Direkte Benutzung der Schriften des al-Karajī ist jedoch ausgeschlossen.

[34] Desto mehr schlagend, als Jacopo in einer Münzliste die Abkürzung m für *meno* benutzt, die bei späteren Autoren – und also zur Zeit der Herstellung des Manuskriptes (a) – auch algebraisch verwendet wurde.

[35] Aus Gründen, welche hier vorzulegen zu weit führen würde (die aber mit den kleinen Details der Formulierungen zu tun haben), können wir mit ziemlicher Sicherheit annehmen, daß diese Beispiele nicht nur mit denjenigen von Jacopo übereinstimmen, sondern auch indirekt von Jacopo stammen; s. [Høyrup 2006] oder [Høyrup 2007b: 159–169].

[36] »Truovami tre numeri che sieno in positione insieme come 2 di 3 e 3 di 4 e multipricato lo primo per se medesimo e poi per lo numero faccia tanto quanto el secondo multiplicato per se medesimo et postovi suso lo terzo numero et poi postovi suso 12«.

Auch Gherardi hat keine formalen Rechnungen, aber an einer Stelle spricht sein Text von einem formalen Schema für Kreuzmultiplikation, das auch von späteren Texten bekannt ist:[37]

$$\begin{array}{lcl} 100 & \times & 1\ \text{cosa} \\ 100 & & 1\ \text{cosa piu 5} \end{array}$$

Der *Trattato di tutta l'arte* enthält, wie gesagt, keine systematische Darstellung der Algebra, sondern nur einzeln stehende algebraische Probleme; Jean Cassinet [2001: 124–127] gibt eine fast komplette Liste.[38] Formale Rechnungen findet man hier nicht, im Gegenteil gibt es an einer einzigen Stelle [Florenz-Ms. Fol. 159^r] eine Notation, die lange Zeit den formalen Rechnungen im Wege stehen würde: $\frac{10}{cose}$, für »10 *cose*« stehend. Der Hintergrund ist eine Auffassung vom Nenner des ordinären Bruches als Einheit, die sich sowohl in den Bezeichnungen *denominatio*/*Nenner* als in der häufigen Verwendung in den *abbaco*-Schriften von beispielsweise »il $\frac{1}{3}$« als Schreibweise für »den dritten« widerspiegelt, und die direkter in zwei Aufgaben des *Columbia Algorismus* Ausdruck findet [ed. Vogel 1977: 64–66].[39]

Weniger auffallend als die Algebra aber trotzdem bedeutend als Spur ist die Behandlung der Geometrie des Kreises. Drei der vier in der Provence von Italienern geschriebenen Texte nehmen zuerst den Umkreis, nicht den Durchmesser als Grundparameter (Gherardi hat keine geordnete Darstellung der Geometrie, nur gemischte Aufgaben[40]); daraus wird der Durchmesser bestimmt (durch Teilung mit $3\frac{1}{7}$), und danach die Fläche als $\frac{1}{4}\cdot$(Umkreis·Durchmesser). Sonst kenne ich diese Präferenz nur aus zwei italienischen Texten, beide auch in anderer Weise mit Jacopos Geometrie verwandt und beide aus dem 15. Jahrhundert.[41]

Noch überzeugender als die konsequente Verwendung des provenzalisch-französischen *carco* von 300 Pfund statt des gewöhnlichen italienischen von 400 Pfund bei Jacopo und im *Trattato di tutta l'arte* zeigt diese geometrische Besonderheit, daß die italienischen Rechenmeister

---

[37] S. [Van Egmond 1978: 169].

[38] Nach dieser Liste erwähnt er auch einen rudimentären Anfang einer systematischen Präsentation der Algebra, der zwar im selben Kodex gebunden und auf Papier mit Wasserzeichen aus denselben Jahren, aber in anderer Hand geschrieben ist [Van Egmond 1980: 140*f*]. Eines der nicht mit Jacopo übereinstimmenden Beispiele des Gherardi findet sich hier. Eine verwandte Aufgabe, auch mit *cosa* und *censo* gelöst, bringt Gherardi viel früher in seinem *Libro* [ed. Arrighi 1987b: 21].

[39] Wir finden hier sowohl »einfache Brüche«, wie $\frac{1}{grana}$ für »1 *grana*« stehend, als links-rechts geschriebene »aufsteigende Kettenbrüche« wie $\frac{1\ \ \ 1}{grana\ 2}$, »1 *grana* und $\frac{1}{2}$ von 1 *grana*«.

[40] Diese gehen unter zwei Überschriften (jede Aufgabe hat die ihre): entweder *misura* oder *giometria* (ausnahmsweise geben einige wenige in der Überschrift das Sujet, z. B. *Chadrare)*. Interessanterweise kennzeichnet *giometria* solche Aufgaben, die aus der lateinischen (»Boethius-«, Agrimensor- und post-Agrimensor-) Tradition kommen oder kommen können, während *misura*-Aufgaben von arabischer *misaha*-Geometrie zu stammen scheinen. Da diese Struktur meines Wissens nicht anderswo zu finden ist, ist daraus kaum etwas sicheres zu schließen.

[41] Die *Praticha di geometria e tutte le misure di terra* des Edelmann und Dilettanten Tommaso della Gazzaia [ed. Arrighi & Nanni 1982], und die *Praticha di gieometria* des Militäringenieurs Francesco di Giorgio Martini [ed. Arrighi 1970: 30]. Obwohl in *abbaco*-Tradition stehend ist also keine dieser Schriften ein eigentliches *abbaco*-Buch.

nicht in die Provence kamen um Italienisches zu lehren, sondern des Lernens willen.

Ohne Vorläufer in dem knappen früheren italienischen Material sind Zahlenschemata, die von rechts nach links zu lesen sind. Solche Schemata finden sich in Jacopos *Tractatus* (sowohl schon in (a) als extra hinzugefügt in (b+c)) und in dem *Trattato di tutta l'algebra*. Fibonacci schreibt zwar seine gemischten Zahlen von rechts nach links, aber seine Schemata sind sämtlich links-rechts geordnet. Da es solche Schemata in dem *Livero* und dem *Columbia Algorismus* nicht gibt (und da sie, soweit ich bemerkt habe, auch nicht später in Italien zu finden sind), liegt die Vermutung nahe, daß auch diese Schemata in der Provence gelernt worden sind.[42]

Die zwei Schreibweisen der hindu-arabischen Ziffern nach Jacopo (Vatikan-Manuskript).

Es liegt auf der Hand, in einer Präsentation der hindu-arabischen Ziffern diese Ziffern als Reihe zu zeigen. Sowohl Jacopos *Tractatus* wie der *Trattato di tutta l'arte* tun es tatsächlich, aber in einer bemerkenswerten Weise. Beide zeigen zwei Varianten der Reihe, die »alte« und die »neue«, und beide ordnen die Reihen von rechts nach links. Grundsätzlich unterscheiden sich die beiden Reihen nur bei den Ziffern 4 und 7; die »alte« Form von 4 scheint iberischen Ursprungs zu sein. Die Idee, zwei Varianten der Reihe vorzuzeigen, geht (mindestens) auf ibn al-Yāsamīn (Marrakeš und Sevilla, fl. etwa 1200) zurück [Burnett 2002: 269 Pl. 1; Kunitzsch 2005: 17]. Bei ihm (und in verschiedenen lateinischen Manuskripten, die ihm folgen [Burnett 2002: Pl. 17, 19a]), werden ost- und westarabische Formen einander entgegengestellt; unsere zwei in der Provence schreibenden Italiener dagegen geben eine ursprünglichere Form und eine spätere Anpassung der westarabischen Ziffern. Da sich ähnliches nicht bei anderen *abbaco*-Autoren findet, weder früher noch später, darf man vermuten, daß schließlich auch dies eine provenzalische Gewohnheit widerspiegelt.

Etwas haben die in der Provence schreibenden Italiener von Hause jedoch mitgebracht. Gherardi gibt den Dreisatz in fast denselben Worten wie der *Liber habaci* (und damit auch wie der *Livero*). Jacopo (a-Version) ersetzt »che non è di quella medesima« mit »che non è simigliante« und erweitert ein wenig am Schluß (»nel'altra cosa, cioè, nell'altra che remane«), ist aber sonst mit den anderen identisch; der *Trattato di tutta l'arte* und die (b+c)-Version von Jacopo erweitern stattdessen »nell'altra, cioè nella terza cosa«. Gherardi hat als erstes Beispiel Silber gegen Münzwert, die anderen drei fangen mit Münzsorte gegen andere Münzsorte an (im allgemeinen das gewöhnlichste in den *abbaco*-Büchern, während bei den Arabern Ware gegen Geldwert so vorherrschend ist, daß es auch die Terminologie bestimmt). In diesem Punkt haben die Italiener also nicht von der lokalen provenzalischen Umgebung gelernt. In vielen anderen Punkten ist es vermutlich nicht entscheidbar, in welcher Richtung die Inspiration gegangen ist – dazu ist das bekannte iberisch-provenzalische Material zu knapp und zu jung.

42 Häufige Fehler in den kopierten Manuskripten zeigen auch, daß die Kopisten an diese Organisierung einer Textseite nicht gewöhnt waren.

Anderes aus der zweiten Generation

Von etwa 1330 und aus der Gegend von Lucca stammt eine mehrhändige Kompilation *Libro di molte ragioni* [ed. Arrighi 1973]. In vielem scheint sie unabhängig von den gerade diskutierten Arbeiten zu sein und also ein Zeugnis von dem, was in Italien selber sich entwickelt hatte. Ganz unabhängig ist sie jedoch nicht. Sie enthält nicht weniger als zwei algebraische Abschnitte, einen mit der Überschrift *Regola della chosa* und einen benannt *Algebra*. Beide geben die sechs grundlegenden Regeln mit Beispielen und danach eine Auswahl der Regeln für die reduzierbaren Fälle dritten und vierten Grades;[43] sie stimmen weithin miteinander überein, und ihre gemeinsame Quelle steht zwischen Jacopos und Gherardis Texte (welches der Grund dafür ist, daß Gherardis Algebra nur indirekt von Jacopo kommen kann, s. Note 35). Daß gar zwei Mitglieder des Kompilatorkollektivs die Algebra behandeln, bezeugt die Wichtigkeit, die diese neue Technik schnell erreichte unter den *abbaco*-Meistern – eine Wichtigkeit, die nicht selbstverständlich war, da Algebra nicht innerhalb des Lehrplans des zwei-jährigen *abbaco*-Studiums fiel.[44]

Ein illustratives Beispiel von der zu erwartenden Integration und Bearbeitung der aus der Provence kommenden Inspiration gibt eine geometrische Aufgabe [ed. Arrighi 1973: 121]. Sowohl Jacopo [ed. Høyrup 2007b: 276*f*, 436] wie der *Trattato di tutta l'arte* (Florenz, Fol. 132^{r}) haben eine Aufgabe über das Pflastern (*lastricare*) eines rechteckigen Raumes oder Platzes.[45] Die Aufgabe scheint aus der post-agrimensorischen Tradition zu kommen[46] und wird in »provenzalischer« Form von Tommaso di Gazzaia [ed. Arrighi & Nanni 1982: 19] wiederholt. Die Lucca-Kompilation pflastert dagegen ein schräg gestelltes Dach mit bekannter Höhe und bekanntem Aushang über die Wand – spricht aber noch von *lastricare*, was in diesem architektonischen Zusammenhang ziemlich sonderbar ist, und verrät dadurch den Ursprung der Aufgabe.

Ebenfalls zur zweiten Generation, wenn auch zu ihrer Spätphase, gehören Biagio »il vecchio«, Paolo dell'abbaco und Giovanni di Davizzo. Von Biagio und Giovanni haben wir jedoch nur Zeugnisse und Auszüge aus dem 15. Jahrhundert; von Paolos eigentlich mathematischen Schriften haben wir die *Regoluzze*, eine kurze Sammlung von sehr summarischen Regeln [ed. Arrighi 1966], und eine einzige Seite zur Visierkunst [ed. Boncompagni 1851: 383*f*]; darüber hinaus gibt es zwei Aufgabensammlungen aus dem 15. Jahrhundert, die angeblich

---

[43] Tatsächlich gibt die *Algebra* nur fünf, aber danach spricht sie von »6 reghole«; eine ist also einfach vergessen worden.

[44] Für diesen Lehrplan haben wir zwei Quellen, eine eigentliche Beschreibung aus Pisa von 1428–29 [ed. Arrighi 1967b] und einen Kontrakt mit einem Hilfslehrer aus Florenz von 1519 [ed. Goldthwaite 1972: 421–425]. Dazu kommen verstreute Bemerkungen in verschiedenen *abbaco*-Büchern.

[45] Gherardi [ed. Arrighi 1987b: 62*f*] hat sie auch, nur mit Ziegelbelegung (*amatonare*).

[46] Sie ist zu finden in den *Propositiones ad acuendos iuvenes* [ed. Folkerts 1978: 62] und in der *Geometria incerti auctoris* [ed. Bubnov 1899: 355].

Auszüge aus seinen Schriften sein sollten.[47]

Alchune ragione, ein 1424 geschriebenes Manuskript (Vatikan, Vat. lat. 10488[48]), enthält sechs Seiten mit der (später hinzugefügten) Überschrift *Algebra*, die angeblich von einem am 15. September 1339 von Giovanni di Davizzo de l'abacho da Firenze geschriebenen Buch kommen sollen; die Datierung kommt vermutlich aus dem Kolophon des Buches, und die Angabe scheint damit glaubhaft.[49]

Giovannis Algebra-Fragment fällt in zwei Teile; der zweite (Fol. 30ʳ–31ᵛ) enthält 19 Regeln für die Lösung reduzierter Gleichungen: 18 stimmen mit Jacopos Regeln überein (zwei davon fehlen), aber in Worten, die genügend verschieden sind, um Jacopo als Quelle auszuschließen. Eine ist falsch, aber fast unlesbar;[50] soviel ist doch sicher, daß sie nicht zu einem von Gherardi behandelten Fall gehört. Sie bezeugt, daß die Quelle, aus der einst Jacopo geschöpft hat, auch später benutzt wurde. Der erste Teil (Fol. 28ᵛ–29ᵛ, ed. [Høyrup 2007d: 479–481]) entspricht in einem gewissen Maß dem Blatt, das von Jacopos Algebra verschwunden sein kann: Sie enthält die Regeln für Multiplikation von Vorzeichen und algebraischen Potenzen und Beispiele für das Rechnen mit Wurzeln.[51] Sie geht aber weiter und postuliert eine ganze Reihe von Regeln für Division zwischen algebraische Potenzen, in welchen die negativen Potenzen durch (multiplikativ zusammengesetzte) »Wurzeln« (und die erste negative Potenz durch »Zahl«) ersetzt sind.[52] Dasselbe System findet sich im 15. Jahrhundert bei Piero della Francesca und Giovanni Guiducci und noch 1555 bei Bento Fernandes [Silva 2006: 14] – immer aber in Formulierungen so nahe an Giovanni di Davizzo, daß er als einzige Quelle (und damit vermutlich Urheber) angesehen werden muß. Die falschen Lösungen bei Gherardi sind also nicht das einzige Zeugnis dafür, daß schon in der zweiten Generation mit der Algebra experimentiert wurde.

Mathematisch kompetenter ist Biagio, wie wir ihn aus Benedetto da Firenzes Auszug kennen. Laut Benedetto [ed. Pieraccini 1983: 1] ist Biagio »1340, o circha« gestorben, und er gehört also mit Sicherheit zu unserer »zweiten Generation«.

Im Buch XIV seines 1463 geschriebenen *Trattato di praticha d'Arismetricha* sammelt

---

[47] Van Egmond [1977: 20] bezweifelt das emphatisch, aber mit der Begründung, daß die zwei Sammlungen sich ziemlich stark von dem *Trattato di tutta l'arte* (den er, wie erwähnt, dem Paolo zuschreibt) unterscheiden. Da diese Identifizierung des Verfassers des *Trattato* selber emphatisch zu bezweifeln ist, entfällt dieses Argument. Eine Vergleichung der Details der herausgegebenen Sammlung *Istratto di ragioni* [ed. Arrighi 1964] mit den *Regoluzze*, zum Beispiel die Behandlung der Multiplikation von gemischten Zahlen ([Arrighi 1964: 28] bzw. [Arrighi 1966: 33]), deutet jedoch nicht auf enge Verwandtschaft.

[48] Ich verwende die ursprüngliche Foliierung.

[49] Giovanni (fl. 1339–1344) gehörte zu einer florentinischen Familie von *abbaco*-Meistern, deren Wirksamkeit während fast des ganzen 14. Jahrhunderts andauerte – s. [Ulivi 2002: 39, 197, 200].

[50] Irgend jemand hat den Fehler entdeckt und einen Zettel hinübergeklebt; der Zettel ist später abgefallen, aber das Manuskriptpapier ist so dunkel wie die Tinte geworden.

[51] Auch diese Regeln erinnern an al-Karajīs *Fakhrī*, vgl. Note 47.

[52] Eine genauere Analyse würde zu weit führen, aber s. [Høyrup 2007d: 478–484] und [Høyrup 2007c: 8–12].

Benedetto eine Reihe algebraischer Aufgaben

> aus Meister Biagios *Trattato di Pratica*, nicht weil die anderen, die darüber schreiben, nicht ziemlich reichlich sagen, sondern weil er, Meister Gratia de' Chastellani zufolge, der erste war, der den besagten *Trattato* auf eine gute *pratica* reduzierte, da er 1340, oder etwa, starb, und es vor ihm keiner gewesen war, der diese *pratica* behandelt hatte, wenn nicht für lange Zeit, bis zur der, wo Leonardo Pisano blühte. Und der besagte Meister Biagio war Meister und Freund des großen Meister Paolo [dell'abbaco].[53]

Benedetto war den zeitgenössischen Humanisten ähnlicher als die meisten *abbaco*-Autoren und geht z. B. ausdrücklich in seiner eigenen Einführung hinter Fibonacci zurück und kopiert al-Khwārizmīs geometrische Beweise »weil älter« [ed. Salomone 1982: 20].[54] Unter den *abbaco*-Vorgängern zitiert er jedoch nur diejenigen, die zu seiner eigenen Schulgruppe (als Meister, Schüler oder Freunde) gehören – ein Lokalpatriotismus, der (bezüglich gleichartiger Manuskripte, vgl. Note 72) schon von Arrighi [2004/1967: 163; 2004/1968: 209] bemerkt worden ist, und ein Benehmen, das auch den Humanisten nicht unähnlich ist. Ob er, zwischen Fibonacci und Biagio, Jacopo und Gherardi nicht kennt oder nicht kennen *will*, ist nicht zu entscheiden. Jedenfalls achtet er Biagio hoch.

Von Biagio gibt Benedetto nur Aufgaben wieder, keine Regeln, weder für Multiplikation von Vorzeichen und Potenzen noch für Gleichungslösung. Solche Regeln hat Benedetto selber schon in Buch XIII [ed. Salomone 1982] gegeben, und ihre Abwesenheit von Buch XIV ist also kein Indiz, daß Biagio nichts dem Jacopo oder dem Giovanni di Davizzo ähnliches hatte. Auf jeden Fall haben wir eine solche geordnete Einführung von Biagios Hand nicht, nur Einzelaufgaben. Innerhalb dieser gibt Benedetto Hinweise auf seine eigene Numerierung der Fälle, und auch die Terminologie ist derjenigen des Buches XIII so ähnlich, daß man an eine Anpassung der Formulierungen glauben muß.[55]

Trotz dieses Zweifels an Biagios genauer Formulierung ist es deutlich, daß er nicht auf Fibonacci baut. Er baut auch nicht auf Jacopo (oder Gherardi u.s.w.), hat aber mit Jacopo und den algebraischen Aufgaben im *Trattato di tutta l'arte* so viel gemeinsam, daß er aus derselben Umgebung seine Inspiration genommen haben muß.

---

[53] Ed. [Pieraccini 1983: 1]. Da Benedettos Text mehrmals (auch unter den Bedingungen seiner Zeit) ungrammatisch ist und die Übersetzung damit zweifelhaft, gebe ich seine eigene Worte wieder:

> Voglio porre e chasi che scrive maestro Biaggio nel suo trattato di praticha, non perchè gli altri che ànno scritto non dichino assai chopiosamente, ma perchè lui fu, sechondo che scrive maestro Gratia de' Chastellani, el primo che a una buona praticha ridusse el detto trattato, inperochè, nel 1340, o circha, morì che, inanzi a'llui non c'era stato chi avesse, se non per un lungho modo, trattato di questa praticha e inn'el suo tempo L. Pisano fiorì. E fu el detto maestro Biaggio maestro e chompagnio del gran maestro Pagholo.

[54] Aufgaben von Fibonacci bringt er in Übersetzung im dritten Kapitel seines Buch XV [ed. Salomone 1984].

[55] Z. B. reden beide Bücher nur selten von Zahlen, die »in proportione« gegeben sind; sie sagen stattdessen (z. B.), daß die erste ein solcher Teil von der zweiten ist wie 2 von 3, und die dritte ein solcher Teil von der vierten als 3 von 4. Diese Redeweise ist ungewöhnlich.

Die Einkleidungen sind von einer Art, die wir von den in der Provence schreibenden Italienern (in ihrer Gesamtheit, aber nicht von Fibonacci) kennen: zerlegte 10; Zahlen in gegebener Proportion; eine Zahl, wovon $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ weggenommen oder hinzugefügt werden; samt Handelsrechnungs- und Unterhaltungs-Einkleidungen. Auch in den Details erinnern sie mehrmals an Jacopo.

Ganz ähnlich ist z. B. eine Geschäftsreise-Aufgabe. Einer macht bei Jacopo [ed. Høyrup 2007b: 314*f*] zwei Geschäftsreisen; auf der ersten macht er einen Gewinn von 12, nach der zweiten (wo er im selben Verhältnis verdient) hat er insgesamt 54. Bei Biagio [ed. Pieraccini 1983: 62*f*] sind die Zahlen 6 und 27 (also halbiert, und auch hier ohne Währungsangabe); beide geben die Doppellösung, und beide weisen ausdrücklich darauf hin, daß beide Lösungen gültig sind.

Die Verzinsungsaufgaben sind dagegen, obwohl verwandt, verschieden. Bei Jacopo [ed. Høyrup 2007b: 210*f*] wächst ein Kapital von 100 £ in zwei Jahren zu 150 £ an, und der Zinsfuß wird als unbekannte *cosa* genommen. Bei Biagio [ed. Pieraccini 1983: 69–72, 84–85] wachsen in drei Jahren 100 £ zu 172 £ 16 ß bzw. in vier Jahren 10000 £[56] zu 14641 £ an, und der Wert von 100 £ nach einem Jahr wird als *cosa* gesetzt (wodurch die Probleme homogen werden). Im Gegensatz zu Jacopo benutzt Biagio den Dreisatz, um den Kapitalwert nach zwei, drei und vier Jahren zu finden.

Biagio vermeidet falsche Regeln wie diejenige, die wir von Gherardi kennen. Einmal [ed. Pieraccini 1983: 25*f*] geht er doch in die Falle, wie auch Benedetto bemerkt (»hier verliert sich unser Meister«). Für eine Gleichung, die wir als $x^2+\sqrt{x} = 18$ ausdrücken würden, setzt Biagio $\sqrt{x}$ als *cosa* (macht also, würden wir sagen, eine Gleichung, $c^4+c = 18$, verallgemeinerbar als $c^4+\alpha c = \beta$) und gibt die Regel

$$c^2 = \sqrt{((\tfrac{\alpha}{2})^2)^2+\beta} - (\tfrac{\alpha}{2})^2 \ ,$$

die zwar in diesem Fall, aber nicht allgemein gilt.[57]

In Benedettos Wiedergabe benutzt Biagio eine Abkürzung ρ für *cosa*.[58] Da Benedetto sie gewöhnlich nicht selber benutzt, aber jedoch als Hilfe für das Lesen anderer Traktate erklärt [ed. Salomone 1982: 30, vgl. p. iv], steht sie vermutlich schon bei Biagio. Es scheint sicher, daß Biagio einmal [ed. Pieraccini 1983: 133] einen formalen Bruch verwendet, nämlich $\frac{1\rho}{10\ m\ 1\rho}$ (vielleicht ohne Abkürzung, $\frac{1\,cosa}{10\ m\ 1\,cosa}$). Er entsteht als Ergebnis einer Division und wird danach als ordinärer Bruch behandelt.

---

[56] Biagio/Benedetto schreibt 1000, rechnet aber mit 10000.

[57] Darf man vermuten, daß Biagio mit der Lösung $\sqrt{\frac{\alpha^2}{2}+\beta}-\frac{\alpha}{2}$ zur Gleichung $t^2+\alpha t = \beta$ herumgespielt hat, bis er etwas im aktuellen Fall passendes fand?

[58] So die Nachzeichnung in [Pieraccini 1983: xiii]. Dieselbe Abkürzung benutzt das Manuskript Florenz, Bibl. Naz., Fond. princ. II.V.152 [ed. Franci & Pancanti 1988b], dessen Verwandtschaft mit Biagios *Trattato* unten Note 85 diskutiert wird. In der Variante ℘ finden wir sie im Manuskript Vatikan, Ottobon. lat. 3367. Dies Manuskript ist mit Benedettos verbunden, vgl. unten Note 72.

Nach [Tropfke/Vogel et al 1980: 377] benutzt auch Buteo in 1559 eine Variante von ρ.

Paolo dell'Abbaco wird, wie wir gesehen haben, von Benedetto als »groß« gerühmt. Der Kompilator des *Istratto* [ed. Arrighi 1964: 9] redet von ihn als »venerabile«. Selbst wenn wir ihm den *Istratto* zuschreiben (was zweifelhaft ist, vgl. Note 47), und besonders wenn wir ihm den *Trattato di tutta l'arte* entziehen, geben die Quellen keinen guten Grund für solche Urteile. Obwohl er den *Trattato di tutta l'arte* dem Paolo zuschrieb, meinte Van Egmond in [1977:16], daß Paolos Ruhm auf seiner Freundschaft mit der Prominenz seiner Zeit beruhte (kein isolierter Fall in der Gelehrtengeschichte), wenn auch seine (unoriginale) astrologische Tätigkeit eine Rolle gespielt hat. Ohne diese Zuschreibung mag Van Egmonds Urteil noch besser stimmen. Mit oder ohne den respektablen, aber nicht besonderen *Istratto* lehrt er uns jedenfalls nichts fundamental Neues den Prozeß betreffend, in welchem die *abbaco*-Kultur sich in der zweiten Generation entwickelt hat.

Weitere Spuren

Mehr lernen wir aus zwei Schriften der »dritten Generation«: Dardis *Aliabraa argibra* von 1344 und dem anonymen *Trattato dell'alcibra amuchabile* von etwa 1365. Trotz der Datierungen beginnen wir am bequemsten mit letzterem.

Dieser zerfällt in drei Teile. Der erste [ed. Simi 1994: 17–22] enthält Regeln für die Multiplikation von Vorzeichen und von Monomen und Binomen aus Zahl und Wurzel bestehend. Diese werden in Schemata für Kreuzmultiplikation gezeigt, z. B.

```
5 e  piu  ℞ di 20
via
5 e  meno ℞ di 20
```

Der zweite Teil besteht aus Lösungsvorschriften und Beispielen für algebraische Fälle. So weit Jacopos Material reicht, folgt der *Trattato dell'alcibra amuchabile* ihm so wortgenau, daß eine kritische Ausgabe der zwei Texte sinnvoll (und sehr leicht zu machen) wäre. Wo aber Gherardi Beispiele hinzugefügt hat, werden diese mit nur einer Ausnahme vom *Trattato dell'alcibra amuchabile* wiederholt, und das werden auch die meisten der falschen Regeln Gherardis für irreduzible Fälle. Mit Gherardi ist die Übereinstimmung jedoch nicht wörtlich, und sein einziger Fall mit vier Gliedern fehlt. Der Kompilator scheint also einen direkten Abkömmling von Jacopos Text benutzt zu haben, mit Gherardi stattdessen eine Quelle zu teilen[59] – was uns dazu führt, Gherardi nicht als den Erfinder der falschen Regeln anzusehen. Sie müssen nach 1307 und vor 1328 entstanden sein (oder müssen mindestens innerhalb dieser Zeitspanne die Italiener erreicht haben, wenn sie außerhalb ihres Kreises entstanden sind).

Der dritte Teil besteht aus 40 algebraischen Aufgaben, mit Einkleidungen »zerlegte 10«, Verzinsung und Münzwechseln, Verteilung eines bekannten Geldbetrags unter einer unbekannten Anzahl N von Personen, und danach unter z. B. N+5 Personen – und einmal »geben und nehmen«, nicht wie bei Jacopo mit der Quadratwurzel von Geld sondern mit dessen Quadrat.

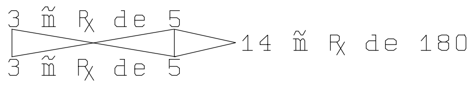
[59] Van Egmond [1978: 162] interpretiert die fehlende Übereinstimmung als eines von mehreren Indizien, daß unser Gherardi-Manuskript eine Kopie ist. Manche der Unterschiede sind jedoch von einer Art, die sich nicht dadurch erklären lassen.

Es ist genau in einer solchen Verteilung eines Geldbetrags, daß Gherardi seinen Ansatz zur Schematisierung des algebraischen Rechnens (s. oben, Text nach Note 37) bringt. Der *Trattato dell'alcibra amuchabile* geht weiter und verwendet formale Brüche, wie z. B. [ed. Simi 1994: 42] $\frac{100 \qquad\qquad 100\qquad}{\textit{per una cosa} \quad \textit{per una cosa e } 5}$, erklärt mit der Parallele $\frac{24}{4}+\frac{24}{6}$. Das Schema für Multiplikation von Binomen wird wieder verwendet, jetzt für algebraische Binome. All das bestätigt Tendenzen, die schon Gherardi und Biagio andeuten, die bei denen aber nur vereinzelt vorkommen, als ob solche Ideen ihnen bekannt, aber noch nicht von ihnen wirklich angeeignet waren.

Auch die multiplikative Zusammensetzung von Wurzeln (aber hier wirklichen Wurzeln!), die wir bei Giovanni di Davizzo getroffen haben (oben, Text nach Note 52), kehrt hier wieder. Als in einer Zinseszins-Aufgabe die fünfte Wurzel genommen werden muß [ed. Simi 1994: 48], wird das als »Wurzel von Kubikwurzel« gemacht (und die sechste Wurzel wird als »Wurzel von Wurzel ⟨von Wurzel⟩« genommen). Gemeinsamer Ursprung der zwei Ideen ist möglich, aber nicht sicher – die multiplikative Zusammensetzung algebraischer Potenzen, wo *cubo di censi*/*censo di cubi* den fünften und *cubo di cubi*/*censo di censo di censo* den sechsten Grad bezeichnen, könnte zu gegenseitig unabhängigen Generalisierungen geführt haben.

Die *Aliabraa argibra* ist der hebräischen Übersetzung Mordechai Finzis zufolge von einem (wie Jacopo, Gherardi und Biagio) sonst unbekannten Meister Dardi von Pisa 1344 geschrieben [Van Egmond 1983: 419].[60] Während sie viel größer ist als der *Trattato dell'alcibra amuchabile*, zerfällt auch sie in drei Teile, alle drei bemerkenswert. Zu allererst kommt ein Vorwort,[61] wo er unter anderem die Bedeutung des arabischen Wortes *aliabraa* als *quistione sottile* angibt; diese Erklärung ist mir nicht von Quellen vor Dardi bekannt. Endlich gibt das Vorwort eine geometrische Interpretation der Termini *cosa*, *censo* und *cubo*.

Der erste Teil lehrt dann die Multiplikation von Monomen und aus Zahl und Wurzel bestehenden Binomen (und wie Giovanni di Davizzo auch die Division und andere Operationen damit, jedoch in größerer Breite). Dardi verwendet hier ein Diagramm, das etwas mehr ausgearbeitet ist als das des *Trattato* – z. B. (Chigi Ms. Fol. 6^r), für (3–√5)·(3–√5)



.

Um die Division von 8 durch 3+√4 zu erklären, verwendet Dardi den Dreisatz: da (3+√4)·(3–√4) = 5, ist 5/(3+√4) = 3–√4; 8/(3+√4) muß deshalb (8·[3–√4])/5 sein.

Auch Jacopo [ed. Høyrup 2007b: 307] und Biagio [ed. Pieraccini 1983: 84*f*] verwenden

---

[60] Ich habe die folgenden Versionen benutzt:
- Vatikan, Chigi M.VIII.170 (~ 1395);
- Raffaella Francis Ausgabe [2001] von Siena, I.VII.17 (~ 1470);
- Warren Van Egmonds persönliche Transkription des Arizon Manuskripts, geschrieben in Mantua in 1429, dem ich für den Zugang dazu herzlich danke.

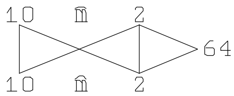
Das Vatikan-Manuskript ist nicht nur das früheste, sondern auch im großen und ganzen das beste (obwohl alle drei Manuskripte sich ergänzen), vgl. [Høyrup 2007b: 170 n. 331].

[61] Das Vorwort ist im Chigi-Ms. verlorengegangen und im Arizona-Ms. mit einem neuen ersetzt worden; es ist aber im Siena-Ms. präsent.

den Dreisatz als Werkzeug für die Algebra. Dagegen tun es die lateinischen und die mir bekannten arabischen Algebren nie.

Das Vorkommen von √4 im Beispiel ist kein Zufall. Dardi verwendet oft rationale Wurzeln »als ob sie irrational waren«/»como s'elle fosse indiscrete« (Chigi Ms. Fol. 3^{v}), aber ohne je den Vorteil daraus zu ziehen, daß die Rechnungen dann kontrolliert werden können. Auch diese Gewohnheit teilt er mit einem seiner Vorläufer – nämlich mit Giovanni di Davizzo.

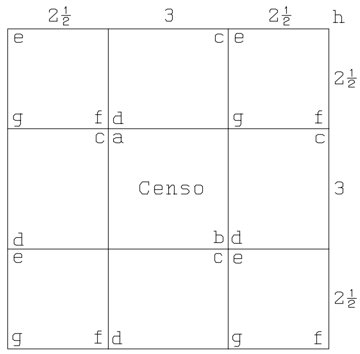
Dardi gibt nicht, wie der *Trattato dell'alcibra amuchabile* und Giovanni di Davizzo, die Regeln für Vorzeichen-Multiplikation in Stichwortform (»mehr mal mehr macht mehr«/»più via più fa più«,[62] »mehr mal weniger macht weniger«/»più via meno fa meno« etc.); stattdessen gibt er (Chigi Ms. 4^{v}) »durch Zahl«/»per numero« (nämlich durch das Beispiel [10–2]·[10–2]) einen intuitiven Beweis, daß »weniger mal weniger macht mehr«/»men via men fa più«. Am Ende kommt ein Diagramm:



Wie bekannt wird dieser Beweis (ob von Dardi erfunden oder nicht[63]) noch von Pacioli in der *Summa* [1494: 113^{r}] wiederholt.[64]

Der zweite Teil bringt die Definitionen und die Lösungsvorschriften für die sechs grundlegenden algebraischen Fälle in derselben Ordnung und derselben nicht-normalisierten Form wie Jacopo und andere Vorgänger. Unterschiedlich von allen (arabischen, lateinischen und *abbaco*-) Vorgängern spricht Dardi in diesen Regeln nicht vom Koeffizienten (z. B.) der *censi* wie *li censi* sondern wie *la quantità de censi* (das Siena-Ms. vergißt das oft und kehrt zur gewöhnlichen Bezeichnung zurück). Ein paar Mal, als Spur seiner Inspiration, kommt *dragma* als Bezeichnung des Zahlenglieds vor, das erste Mal erklärt.

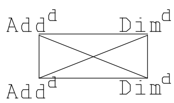
Auch unterschiedlich von den *abbaco*-Vorgängern gibt Dardi geometrische Beweise. Diese stammen grundsätzlich von



Das zu Dardis erstem geometrischen Beweis gehörende Diagramm.

[62] Im *Trattato dell'alcibra amuchabile* sind diese deutschen Übersetzungen die adäquaten; in dem Maße, wie schrittweise der Begriff der additiven und subtraktiven Beiträge sich zu einem Begriff positiver und negativer Zahlen entwickelte, müssen wir »plus mal plus macht plus«, »plus mal minus macht minus« etc. übersetzen.

[63] Der *Liber mahamaleth* (Paris, Bibl. Nationale, Ms. Latin 7377A, Fol. 109^{r}) enthält bei seiner Diskussion der Vorzeichenregeln ein etwas ähnliches Diagramm, obwohl ohne Zahlen:



Das deutet an, daß Dardi vielleicht seine Idee von anderswo übernommen hat, beweist aber nichts.

[64] Und nochmals 1526, mit dem Beispiel (14–4)·(14–4), von Feliciano da Lazesio [1526: $K3^{r}$]. Eine Analyse der Beweise findet sich in [Høyrup 2007d: 3–6].

al-Khwārizmī, sind aber in den Details verschieden von allem, was wir in den lateinischen und in den mir bekannten arabischen Algebren finden. Illustrativ ist schon die Buchstabenmarkierung in dem zum ersten Beweis gehörenden Diagramm (für weitere Diskussion s. [Høyrup 2007b: 171*f*]): sie ist deutlich durch eine Umgebung tradiert worden, die weder mit den euklidischen Konventionen, noch mit den davon leicht verschiedenen Konventionen al-Khwārizmīs vertraut war.[65] Eine indirekte Verbindung mit der gelehrten Welt muß Dardi jedoch gehabt haben: im Vorwort erklärt er im besten hoch-scholastischen Stil die vier Ursachen (*respetti*) seines Buches [ed. Franci 2001: 37].

Gegen Ende des zweiten Teils kommt ein Ratschlag für die Zetetik; schließlich lehrt Dardi, wie man algebraische Binome multipliziert und wie man *cosa*, *censo*, *cubo* und *censo di censo* multipliziert, dividiert und »kürzt« (*schizzare*, das Wort, das auch für Bruchkürzung benutzt wird).

Schon in diesem Teil verwendet Dardi die Abkürzung *c* für die *cosa* und *ç* für den *censo* (der Lesbarkeit halber werde ich im folgenden *Ç* verwenden). Darüberhinaus verwendet er auch die Pseudo-Bruchnotation, die wir in *Trattato di tutta l'arte* angetroffen haben, in welcher $\frac{10}{c}$ für »10 *c*« steht. Beides wird auch in dem dritten Teil verwendet, die »Bruch«-Notation auch erweitert als (links-rechts geschriebener) aufsteigender Kettenbruch, wo $\frac{2}{c}\frac{1}{2}$ für $\frac{2}{c}$ plus $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{c}$ (also 2½*c*) bedeutet. *Radice* wird als ℞ abgekürzt.

Im Kommentar zur Doppellösung vom fünften Fall kommen Wendungen vor, die sehr nahe denen des Jacopo zu seinem Beispiel mit gültiger Doppellösung (s. [Høyrup 2007b: 172]) kommen. Irgendwie müssen die zwei Texte an diesem Punkt auf eine gemeinsame Quelle oder Tradition zurückgehen.

Der dritte Teil enthält gültige Lösungsvorschriften[66] und Beispiele für 194 »reguläre« Fälle (d. h. Fälle, die sich auf homogene Gleichungen oder Gleichungen ersten und zweiten Grads reduzieren lassen) und außerdem 4 »irreguläre« Fälle (d. h. Fälle, wo die angegebenen Vorschriften nur für bestimmte Koeffizienten gültig sind).

Der Grund, daß Dardi bis auf 194 reguläre Fälle kommen kann, ist, daß er die Erscheinung von Radikalen erlaubt – nicht nur, wie einmal bei Gherardi, Wurzeln von Zahlen, sondern auch von Potenzen der Unbekannten. Als Beispiele seien (in gemischter Kurzschrift) erwähnt:

$$\alpha c+\beta\sqrt{K} = \gamma Ç \qquad \alpha c+\beta\sqrt{Ç} = \gamma Ç$$
$$\alpha ÇÇ = n+\sqrt[3]{m} \qquad \alpha ÇÇ+n+\sqrt[3]{m} = \beta Ç$$

[65] Das Arizona-Manuskript beginnt zwar den zweiten Teil (Fol. 23r) mit einem Hinweis auf einem *Tractado de algeble amughabala* und hat wenig später einen Querverweis auf das, was der Leser beim weitergehen im *dito Libro*/»besagtem Buche« sehen wird. Die anderen zwei Manuskripte sagen jedoch nur, daß wir jetzt den *trattato dell'arzebra* (Orthographie Chigi) anfangen, und der Querverweis ist auf das, was der Leser beim weitergehen »in diesem Buch« (welches er in den Händen hat) sehen wird. Das inkonsistente Futur im Arizona-Querverweis zeigt, daß die Chigi-Siena-Formulierung die ursprüngliche ist und daß also Dardi nicht von einem schon vorhandenen Traktat spricht.

[66] Zwei Fehler werden von Van Egmond [1983: 417] überzeugend erklärt – s. auch unten.

K steht hier für *cubo*, für welchen Dardi keine Abkürzung benutzt, *n* und *m* für *numero* und griechische Buchstaben für Koeffizienten (deren Anwesenheit Dardi, wie andere *abbaco*-Autoren, durch die Benutzung des Plurals zeigt). Für uns mögen viele trivial reduzierbar erscheinen, ohne die moderne algebraische Symbolik waren sie das sicherlich nicht. Wenn er nicht alles kopiert hat (eine Annahme, für welche wir überhaupt keine Gründe haben), muß Dardi ein gescheiter Algebraiker gewesen sein.

Alle regulären Regeln sind mit einem oder zwei Beispielen versorgt – diejenigen, die eine Doppellösung besitzen, jedoch wie bei Jacopo mit dreien. Alle sind reine Zahlenprobleme – fast die Hälfte fragen nach zwei oder drei Zahlen in gegebener Proportion, mehr als ein Viertel nach einer einzelnen Zahl, die die Bedingungen der Gleichung erfüllt, etwa 15% sind vom Typ »zerlegte 10«.

Dann gibt es wie gesagt vier irreguläre Fälle:

$$\alpha K+\beta Ç+\gamma c = n \qquad \alpha c+\beta Ç+\gamma ÇÇ = n+\delta K$$
$$\alpha ÇÇ+\beta K+\gamma Ç+\delta c = n \qquad \alpha c+\gamma ÇÇ = n+\beta Ç+\delta K$$

Deren Regeln sind, wie Dardi sagt (Chigi Ms., Fol. 102[r]), »angepaßt nur ihren Aufgaben und den Eigenschaften, mit denen diese konstruiert sind«. Trotz dieses Mangels werden sie mitgenommen, weil sie in gewissen Aufgaben auftauchen können. Jede ist mit einem Beispiel versorgt.

Die Beispiele der letzten zwei Regeln sind vom Typ »zerlegte 10«, und könnten insoweit von Dardi konstruiert sein. Diejenigen der ersten zwei dagegen sind Verzinsungsaufgaben, wie wir sie bei Jacopo und Biagio getroffen haben. Bei Dardi wachsen 100 £ in drei Jahren auf 150 £ an, bzw. in vier Jahren auf 160 £. Wir erinnern uns, daß bei Jacopo auch 100 £ auf 150 £ anwachsen. Wie Jacopo nimmt auch die *Aliabraa argibra* den Zinsfuß (in *denari* pro *soldo* und Monat) als *cosa* – aber wie Biagio benutzt auch Dardi den Dreisatz, um die Kapitalwerte nach zwei, drei und vier Jahren zu finden.

Da Dardi selber seine Beispiele als reine Zahlenaufgaben immer konstruiert, ist es klar, daß mindestens die ersten zwei irregulären Regeln und ihre Beispiele nicht von Dardi kommen – und dann vermutlich auch nicht die letzten zwei. Es ist nicht schwer zu dechiffrieren, *wie* die Regeln konstruiert worden sind. Der Vorgang kann im ersten Fall so skizziert werden: Setzen wir den Zinsfuß zu *x soldi* pro Monat und £ (also $\frac{12}{20}x$ £ pro Jahr und £), dann ist $100\cdot(1+\frac{12}{20}x)^3 = 150$, und also $x = \sqrt[3]{(\frac{20}{12})^3\cdot\frac{150}{100}} - \frac{20}{12}$. Entwickeln wir aber die Gleichung, finden wir

$$x^3+3\cdot\frac{20}{12}x^2+3\cdot(\frac{20}{12})^2x = (\frac{20}{12})^3\cdot\frac{150}{100}-(\frac{20}{12})^3 .$$

Wir sehen hier, daß $\frac{20}{12}$ als Quotient der Koeffizienten von x und x^2 gefunden werden kann und daß $(\frac{20}{12})^3\cdot\frac{150}{100}$ als Summe der Zahl und $(\frac{20}{12})^3$ entsteht; weiter, daß x dadurch gefunden wird, daß wir von dieser Summe die dritte Wurzel ziehen, und danach $\frac{20}{12}$ subtrahieren – was genau Dardis Regel ist. Vielleicht von einem Vorläufer für Biagios Aufgabe ausgehend (das scheinen die Jacopo-Zahlen in Kombination mit der Verwendung des Dreisatzes zu zeigen) hat irgendein *abbaco*-Meister, um seine Fähigkeit zu vergrößern, in dieser Weise eine homogene Gleichung in eine inhomogene Gleichung mit (ihm) bekannter Lösung verwandelt. Die anderen irregulären

Fälle laufen ähnlich.

Die Verzinsungsaufgaben (zuweilen nicht nur die Verzinsungsaufgaben) tauchen in nicht wenigen späteren *abbaco*-Büchern auf:

– Florenz, Bibl. Naz., Fond. princ. II.III.198 (s. [Franci 2002: 96*f*]);
– Parma, Bibl. Palatina, Ms. Pal. 312 [ed. Gregori & Grugnetti 1998: 24*f*];
– Palermo, Biblioteca Comunale, Ms. 2Qq E13; enthält auch den dritten irregulären Fall (s. [Franci 2002: 97*f*]);
– Vatikan, Vat. lat. 4825 (Tomaso de Jachomo Lione), Fol. 80^{r}–81^{r}; enthält auch den dritten Fall, aber in merkwürdig verdrehter Form[67] (Fol. 81^{v}–82^{r}), und dazu noch einen Fall »ziensi e chubi e ziensi di ziensi sono iguali a radize di numeri«;[68]
– vermutlich auch in Florenz, Ricc. 2252, welches nach [Franci 2002: 98] dem Palermo-Manuskript »quite similar« sein sollte;
– Florenz, Bibl. Naz., Palatino 567 (Raffaello Canacci, *Ragionamenti d'algebra* [ed. Procissi 1954: 441]); enthält genau dieselben vier Regeln wie bei Tomaso di Jachomo di Lione, jedoch ohne Beispiele;
– Vatikan, Vat. lat. 10488, Fol. 93^{v}, enthält Dardis erste irreguläre Regel ohne Beispiel; Fol. 94^{v} enthält übrigens die Regeln für »*cose* ist gleich Wurzel von Zahl«/»chose è ingual a radice di numero«, »die Zahl ist gleich Wurzel der *cose*«/»i numero è ingual ale radice dele chose«, »die *censi* ist gleich Wurzel von Zahl«/»le zensi è ingual a radice di numero« und »die Zahl ist gleich Wurzel von *censo*«/»li numero s'è ingual a radice di zenso«;[69]
– Florenz, Bibl. Naz., Palatino 575 [ed. Simi 1992: 53], nur Regeln; enthält auch zwei der zusätzlichen Regeln des Vat. lat. 10488 und andere derselben Art, die sich nicht bei Dardi finden (z. B. »radici di censi di censi sono iguali al numero«).
– Endlich tauchen die ersten drei Regeln mit den gewöhnlichen Beispielen auf in Bento Fernandes *Tratado da Arte de Arismética* von 1555 [Silva 2006], sowie auch der

[67] Der Text selber ist unklar – man möchte unmittelbar glauben, daß »radice di censi e di cose e di censi di censi« $\sqrt{\beta Ç}+\sqrt{\gamma c}+\sqrt{\alpha ÇÇ}$ bedeuten sollte, und dann ist alles einfach sinnlos; es ist aber auch möglich, daß $\sqrt{\beta Ç+\gamma c+\alpha ÇÇ}$ gemeint ist, und dann ist alles nur künstlich verdreht, und die gegebene Erklärungen scheinbar irrelevant. Der verwandte Glaube, daß $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{a}+\sqrt{\sqrt{b}}$, findet sich im eben erwähnten Parma Manuskript [ed. Gregori & Grugnetti 1998: 115*f*].

Es sollte kontrolliert werden, ob nicht auch das Palermo-Manuskript von derselben Verworrenheit charakterisiert ist.

[68] Als Beispiel (und sicherlich als Grundlage der Lösungsformel) dient nochmals eine Zinseszinsaufgabe: 50 £ wachsen in 2 Jahren auf $(50+\sqrt{484})$ £ an. Das Beispiel enthält sowohl Schreib- oder Abschreibungs- wie Rechenfehler, aber die dahinterliegende Idee ist so gut oder schlecht wie in Dardis irregulären Fällen.

Man kann vermuten, daß die Regel und das dazugehörige Beispiel sich auch im Palermo-Ms. befinden.

[69] Diese vier Regeln stehen sämtlich bei Dardi (als Nr. 18, 17, 19 und 20), sind aber zu einfach und mit Gherardis Fall $\alpha K = \sqrt{n}$ zu eng verwandt, um eine Abhängigkeit anzudeuten. Eine gemeinsame Inspiration oder (eher) Quelle ist viel wahrscheinlicher.

hinzugefügte Fall des Tomaso de Jachomo Lione.

Wenn wirklich diese Manuskripte (und das gedruckte Buch) ihre Inspiration von Dardi herleiten sollten,[70] wäre es sehr merkwürdig, daß sie nur diese Regeln mit begrenzter Gültigkeit erwähnen sollten, ohne eine wirkliche Spur von den 194 regulären Fällen vorzuzeigen[71] – sämtliche auch ohne die Begrenzung zu erwähnen und sämtliche ohne Dardis innovative Terminologie für Koeffizienten zu übernehmen. Sie müssen mit Dardi eine gemeinsame Quelle haben, die also Dardi vorausgeht und zur »zweiten Generation« gehört. Dardi mag selber die Begrenzung entdeckt haben, hat die Regeln aber trotzdem in seinem Buch aufgenommen wegen ihrer gelegentlichen Nutzbarkeit – nämlich im Wettkampf mit Konkurrenten, die sie benutzen möchten.

Antonio de' Mazzinghi

Laut Franci [1988a: 240, 241] sollen drei enzyklopädische Werke in *abbaco*-Tradition aus Firenze, alle von etwa 1460,[72] Antonio de' Mazzinghi[73] als »den besten Algebraiker des vierzehnten und fünfzehnten Jahrhunderts« betrachten; danach wird gesagt (als ob es dasselbe wäre), daß sie ihn zum »besten florentinischen Mathematiker aller Zeiten« ausrufen. Nach den Exzerpten in [Arrighi 1967a: 8], [Arrighi 2004/1968: 221] und [Arrighi 2004/1967: 194] ist diese Interpretation etwas überschwenglich, besonders angesichts des Lobs, das auch anderen Vorläufern zu Teil wird. Hoch gelobt wird Antonio jedoch – und mit guten Grund; das bestätigen die *Fioretti*, die Arrighi [1967a] auf Grundlage von Benedettos *Trattato* herausgegeben hat.

Alle drei Enzyklopädien zitieren nicht nur Aufgaben von Antonios Hand, sondern auch Fibonacci und andere *abbaco*-Autoren – und Benedetto und der Kompilator von Palatino 573 auch die Algebra des al-Khwārizmī in Gherardos Übersetzung. Schon Antonio spricht mit Veneration von Fibonacci.[74] Es ist deshalb naheliegend zu untersuchen, ob er irgendwie innerhalb einer Fibonacci-Tradition stehen sollte.[75]

Erstens muß bemerkt werden, daß Benedetto auch hier in einem gewissen Maße paraphrasiert und daß wir also nicht der Worte Antonios ganz sicher sein können; insbesondere ist die Numerierung der Fälle identisch mit Benedettos eigener Numerierung im *Trattato*. Auf der Inhaltsebene scheint jedoch alles gut gesichert zu sein.

---

[70] Das ist die Behauptung von Raffaella Franci [2002: 96–98].

[71] Moderne Mathematiker möchten glauben, daß diese Aufgaben die interessantesten weil irreduzibel waren. Das wäre sicherlich eine Überschätzung der Kompilatoren dieser Manuskripte, die auch die völlig verkehrten Regeln wiederholen.

[72] Der bereits zitierte *Trattato* Benedettos; Vatikan, Ottobon. lat. 3307; und Florenz, Bibl. Naz., Palatino 573.

[73] Vermutlich etwa 1355 geboren und 1385/86 gestorben – s. [Ulivi 1996: 109–115].

[74] Zitiert in Ottobon. lat. 3307, ed. [Arrighi 2004/1968: 221].

[75] Das war die These von Franci und Toti Rigatelli in [1985: 45], wo auch Biagio als Repräsentant dieser Tradition gesehen wird. Die These wird in [Franci 2002] nicht wiederholt, und Biagio wird hier (p. 100) mit der Tradition der »22 Regeln« (wozu Jacopo gerechnet wird) in Verbindung gesetzt.

Die meisten der 44 Aufgaben sind reine Zahlenaufgaben, aber Verzinsungs-, Wechsel- und andere Geschäftseinkleidungen gibt es auch. Unter den letzteren können wir eine Fünf-Jahres-Version der Verzinsung mit unbekanntem Zinsfuß [ed. Arrighi 1967a: 38*f*] erwähnen, die wir bei Jacopo in Zwei-Jahres- und bei Biagio und Dardi in Drei- und Vier-Jahres-Versionen getroffen haben. Im Prinzip geht Antonio hier wie Biagio vor; jedoch berechnet er die fünfte Wurzel des Zuwachsfaktors (hier $2\frac{1}{2}$), wie ein moderner Rechner es tun würde. Auch benutzt er den Begriff der stetigen Proportion und erwähnt den Dreisatz nicht; in dieser Aufgabe steht er also deutlich in der bekannten *abbaco*-Tradition, aber er bearbeitet sie unter Anwendung von Werkzeugen, die er von anderswo kennt, und von seiner eigenen mathematischen Fähigkeit. Unmittelbar zuvor bringt er zwei verwandte Aufgaben, von welchen »manche sagen, daß man sie nicht machen kann« – was bedeuten muß, daß die betreffenden Aufgaben als Herausforderung zirkulierten. Es geht um die Umrechnung von Zinseszins mit jährlicher Zinszuschreibung in äquivalenten Zinseszins mit Zinszuschreibung alle 9 bzw. 8 Monate.[76]

Auch unter den Zahlenaufgaben kommt bekanntes vor. Das Beispiel zu Dardis drittem irregulären Fall ist eine zerlegte 10, wo das Produkt der Teile durch ihre Differenz geteilt gleich $\sqrt{18}$ ist. Dardi setzt einen der Teile als *cosa*. Durch Eliminierung der Wurzel kommt er dann zu einer Gleichung vierten Grades. Bei Antonio [ed. Arrighi 1967a: 64] ist der Quotient schwieriger, nämlich $\sqrt{11}+\sqrt{12}$. Er setzt die zwei Teile als 5+*cosa* und 5–*cosa*, und reduziert (der gewöhnlichen Ästhetik der *abbaco*-Mathematik folgend) das zur etwas unangenehmen Gleichung

$$25 = \textit{censo} + \sqrt{44\ \textit{censi}} + \sqrt{48\ \textit{censi}}\ .$$

Antonio weiß aber, daß $\sqrt{44\ \textit{censi}} + \sqrt{48\ \textit{censi}}$ zur Gattung *cose* gehört, und zwar in Anzahl $\sqrt{44}+\sqrt{48}$, und dann ist alles nach dem Elementarbuch zu lösen. Nochmals steht Antonio in der *abbaco*-Tradition, und nochmals scheint er kreativ und nicht repetitiv zu sein. Bemerkenswert ist hier, daß er (oder Benedetto?) den Terminus *raguagliare* als Äquivalent des arabischen *muqābalah* (bzw. lateinischen *opponere*) verwendet, aber im deutlichen Sinn von Herstellung der zur Grundform reduzierten Gleichung (die bei Jacopo [ed. Høyrup 2007b: 316] als *raoguaglamento* erscheint). Auch bei Biagio [ed. Pieraccini 1983: 4, 21, 22] erscheinen *ragugliare* und *aguagliamento* ähnlich.

Andere seiner Aufgaben kenne ich nicht direkt von anderswo, oder ähnliches ist von überall seit al-Khwārizmī bekannt und deshalb für Herkunftsanalysen unbrauchbar.[77] Bei den *Fioretti* fehlt ein Aufgabentyp, der sonst in allen früheren und vielen späteren *abbaco*-Algebren auffallend häufig vorkommt: Die Frage nach Zahlen in gegebener Proportion. Man kann vermuten, daß dieser billige Weg scheinbare Komplexität zu bilden dem hervorragenden Mathematiker Antonio

---

[76] Im letzten Beispiel sieht Antonio, daß in zwei Jahren Zins dreimal zugeschrieben wird und daß deshalb zwei mittlere Proportionalen zwischen Anfangs- und End-Kapitalwert gefunden werden müssen. Diese raffinierten Aufgaben passen dazu gut, daß Antonio als erster Zinstabellen berechnet haben soll (Florenz, Bibl. Naz., Palatino 573, Fol. 258[r], ed. [Arrighi 2004/1967: 183]).

[77] Daß sich mehrere in Gilios 1384 geschriebenen *Questioni d'algebra* [ed. Franci 1983] finden, ist nicht aufschlußreich, da Gilio von Antonio gelernt haben mag.

nicht gefallen hat.[78]

Eine ganze Reihe von Aufgaben handeln von stetigen Proportionen. Das leitet unmittelbar die Gedanken auf den ersten Teil von Kapitel XV des *Liber abbaci*. Doch sind die Zugänge von Fibonacci und Antonio völlig verschieden, und geteilte Aufgaben habe ich auch nicht bemerkt. Darüber hinaus muß man daran erinnern, daß stetige Proportionen auch in der früheren *abbaco*-Tradition vorkommen; so hat Jacopo vier korrekt gelöste Aufgaben, eingekleidet als Aufgaben über ein geometrisch wachsendes Gehalt, von welchen eine gar ein irreduzibles kubisches Problem repräsentiert.[79] Da Antonio ja den *Liber abbaci* kennt, ist es nicht ausgeschlossen, daß sein Interesse an diesem Aufgabentyp von Fibonacci angeregt worden ist; aber er behandelt immer die Fragen mit Methoden, die er aus der *abbaco*-Tradition (und gelegentlich *Elemente* II) kennt.

Von einer »Fibonacci-Tradition« ist er also kein Träger.

Verschiedenes aus dem 15. Jahrhundert

Eine Analyse der drei in Note 72 erwähnten Enzyklopädien würde zu vergleichbaren Resultaten führen.[80] Sie benutzen weitgehend dieselben Quellen – sowohl Arbeiten, aus denen sie Auszüge schöpfen, wie Quellen für historische Information, wie der oben (Zitat vor Note 53) erwähnte Gratia de' Chastellani. Darüber hinaus sind die Kompilatoren von Ottobon. lat. 3307 und Palatino 573 beide Schüler eines gewissen Domenico d'Agostino *vaiaio* (d. h. Gerber oder Pelzhändler – ob er selber oder ein Vorfahr diesen Beruf ausübte muß dahingestellt bleiben). Es ist also nicht merkwürdig, daß sie in vieler Hinsicht sich gleichen – und aus denselben Gründen übrigens unmöglich, sie als gegenseitig unabhängige Zeugen zu betrachten.

Statt uns darin zu vertiefen, können wir uns den Entwicklungen des 15. Jahrhunderts

---

[78] Es gibt kein Grund anzunehmen, daß Benedetto sie in seiner Auslese vermieden habe. In seiner eigenen Algebra (Buch XIII des *Trattato* [ed. Salomone 1982]) findet man davon viel.

[79] Wenn a, b, c und (in Vierjahres-Aufgaben) d die Jahresgehälter repräsentieren, sind die Aufgaben [ed. Høyrup 2007b: 324–331]

$$\begin{aligned} a+c &= 20\ ,\quad b = 8 \\ a &= 15\ ,\quad d = 60 \\ a+d &= 90\ ,\quad b+c = 60 \\ a+c &= 20\ ,\quad b+d = 30 \end{aligned}$$

Jedenfalls im dritten Fall scheint Jacopo nicht zu verstehen, warum seine Lösungsformel gilt; aber auch Cardano [1539: IIii^{v}] scheint es nicht zu verstehen, wenn er genau dieselbe Formel gibt!

[80] In Florenz, Bibl. Naz., Palatino 573 finden wir z. B. (in der Einleitung zur Gesellschaftsrechnung [ed. Arrighi 2004/1967: 180]), daß Fibonacci in seinem 10. Kapitel viele zu diesem Gebiet gehörende Fragen behandelt hat, »aber viel mehr Fälle sind vom Augustinerbruder Meister Gratia [de' Chastellani/JH] geschrieben und gezeigt; und deshalb werden wir in diesem Teil ihm folgen«. Zur Algebra kommend, beginnt der Autor wie Benedetto mit al-Khwārizmī. Dann folgen [Arrighi 2004/1967: 191–194] Regeln für die Arithmetik der Potenzen, angeblich Antonio folgend, und verschiedene Beispiele; endlich Aufgabensammlungen übernommen vom Lehrer des Kompilators (»il vaiaio«), von Fibonacci, von Luca di Matteo, von Giovanni di Bartolo und von Antonio.

themenweise annähern. Als solche Themen sind (gewiß unter anderen, hier nicht erwähnten!) die folgenden interessant:

– Die Bezeichnung und Behandlung der Potenzen;
– Versuche, Gleichungen höheren Grades *wirklich* zu lösen;
– Schemata und Ansätze zur Symbolik.

Bezeichnung und Behandlung der Potenzen

Schon diese Überschrift ist eigentlich irreführend, da die Vorstellung von einer fortgesetzten Reihe von Potenzen erst allmählich während der betrachteten Epoche reift; viel besser, weil neutral, wäre der Begriff von »cossischen Zahlen«.

Bei Jacopo und Dardi wie bei vielen anderen finden wir die Übersetzungen der arabischen Namen: *numero*[81] – *cosa* – *censo* – *cubo* – *censo di censo*; bei Giovanni di Davizzo weiter *censo di cubo* mit *cubo di censo* gleichbedeutend – *cubo di cubo* – und mit einem Sprung *censo di censo di censo di censo* (8. Grad) und *cubo di cubo di cubo di cubo* (12. Grad). Diejenigen dieser Autoren, die die Reduzierbarkeit von Fällen wie $\alpha ÇÇ+\beta K = \gamma Ç$ verstanden und nicht nur gedankenlos kopierten, müssen irgendwie die Sequenz als geometrische Folge verstanden haben. In der frühen Epoche erklärt das aber niemand.

Das System ist, wie wir sehen, multiplikativ, was den Vorteil hat, daß alle Potenzen sich leicht (wenn nicht, wie wir sehen, eindeutig) benennen lassen. Es hat aber drei Nachteile:

– Erstens werden die Namen für höhere Potenzen schnell ziemlich unüberschaubar;
– zweitens, schlimmer, lassen sich die Namen der Potenzen nicht zu den Namen der entsprechenden Wurzeln verbinden – wenn nicht fehlerhaft wie bei Giovanni di Davizzo (s. Text vor Note 52), der die Kubikwurzel der Kubikwurzel als sechste statt neunte Wurzel ansieht (jedoch bezüglich der »Wurzeln«, die für negative Potenzen stehen).[82] Dardis zwei Fehler (s. Note 66) sind Konsequenzen dieses Problems: Dardi hat keine Terminologie für die fünfte und die siebente Wurzel, und verwendet deshalb *radice cuba* und *radice della radice*, obwohl er sonst problemlos mit der Einbettung der Wurzeln umgeht;
– drittens wohnt der Terminologie ein Widerspruch zur multiplikativen Interpretation inne. Sobald wir vom *censo* oder *cubo von etwas* reden (und damit, modern gesprochen, sie als Funktionen verwenden), wird der Widerspruch sichtbar; *cubo* von 2 muß dann 8, und *cubo* von *cubo* von 2 deshalb 8^3, nicht $8 \cdot 8 = 64$ sein. Die lateinische und italienische Genitivkonstruktion macht das unvermeidbar.[83]

---

[81] Dardi verwendet auch zweimal *dramma* – offenbar zusammen mit den geometrischen Beweisen übernommen, da das Wort innerhalb derer vorkommt.

[82] Ähnlicherweise, wie wir uns erinnern, verwendet der *Trattato dell'alcibra amuchabile* »Wurzel von Kubikwurzel« als fünfte Wurzel (oben, Paragraph vor Note 60).

[83] Weder Diophants κυβόκυβος noch das arabische *kaʿb kaʿb* (s. al-Karajīs Liste, arabisch in [Woepcke 1853: 48]) führen zu diesem Problem. Die griechische Zusammensetzung ist nicht mehr einbettend als »anglo-amerikanisch«. *Kaʿb kaʿb* ist zwar eine Genitivkonstruktion, aber die Funktion des arabischen Genitivs ist so viel breiter als diejenige der indogermanischen Sprachen, daß sie der multiplikativen Interpretation nicht widerspricht (Ulrich Rebstock, persönliche Mitteilung).

Nach den Lehrbüchern der Dialektik kommt aus Widerspruch Entwicklung – aber, oft von den alten lieben Lehrbüchern vergessen, eine weder glatte noch voraussagbare Entwicklung. So auch hier. Wir sehen das bei Antonio de' Mazzinghi. Im Manuskript Pal. 573 [ed. Arrighi 2004/1967: 191] zitiert der Kompilator, was Antonio »nel principio del suo trattate« sagt:

> *Cosa* ist in diesem Teil [des Traktats] eine verborgene Quantität; *censo* ist das Quadrat der besagten *cosa*; *cubo* ist die Multiplikation von *cosa* mit *censo*; *censo di censo* ist das Quadrat des *censo*, oder die Multiplikation von *cosa* mit *cubo*. Und merke, daß die Termini der Algebra alle in stetiger Proportion stehen; so wie: *cosa*, *censo*, *cubo*, *censo di censo*, *cubo relato*, *cubo di cubo* u.s.w.

In seiner Aufgabe über eine fünfjährige Verzinsung [ed. Arrighi 1967a: 38] verwendet Antonio dann den Terminus *radice relata* für die fünfte Wurzel. Er hat also die Probleme der fünften Wurzel – sowohl die Benennung als die Verbindung zur Potenz – gelöst. Ihre Ursache, die multiplikative Konstruktion der Potenzen, hat er zwar nicht überwunden, wie wir aus dem Namen *cubo di cubo* der sechsten Potenz sehen – aber gewissermaßen hat er sie durch die Explizierung der stetigen Proportion neutralisiert.

Ich kenne keine Quelle, die über Antonios Behandlung von negativen Potenzen informiert (oder ob er überhaupt eine solche hat). Sicher ist, daß er Giovanni di Davizzos Unsinn nicht wiederholen würde – nicht nur, weil er das als guter Mathematiker »nicht hätte tun können« (immer, *a posteriori* verwendet, ein zweifelhaftes Argument), sondern auch weil seine Behandlung der fünften Potenz und der fünften Wurzel dazu nicht paßt.

Zwei der Enzyklopädien, von denen wir Antonio kennen, übernehmen seine Namen für Potenzen und Wurzeln (Benedetto und Ms. Palatino 573). Ms. Ottobon. lat. 3307 benutzt dagegen für die fünfte Potenz sowohl *censo di cubo* als auch *cubo di censo* (Fol. 304^r).

Für Multiplikation und Division der Potenzen finden wir sowohl bei Benedetto [ed. Salomone 1982: 20–25] als auch in Ms. Ottobon. lat. 3307 [Fol. 304^r–305^r] etwas neues. Z. B., bei Benedetto

> [...]
> e a moltiplichare cose per chubi fanno censi di censi, chome dicendo moltiplicha 6 chose via 8 chubi, fanno 48 censi di censo
> [...]
> partendo chose per censi ne viene rotto nominato da chose, chome partendo 48 chose per 8 censi ne viene $\frac{6}{1\ \mathit{chosa}}$
> [...]
> partendo cubi per censi di censo ne viene rotto nominato da chosa, chome dicendo parti 48 chubi per 8 censi <di censo〉 diremo questo rotto, cioè $\frac{6}{1\ \mathit{chosa}}$
> [...]

In Ms. Ottobon. lat. 3307 finden wir parallel dazu

> [...]
> multiplichando chose via chubi fanno censi di censo chome a dire 6 chose via 8 chubi fanno 48 censi di censo
> [...]
> partendo chose per censi ne viene rotto nominato da censo, chome partendo 48 chose per 6 censi ne viene questo rotto, cioè $\frac{8\ \mathit{chosa}}{1\ \mathit{censo}}$

[...]
partendo chubi per censi di censo vienne rotto nominato da censo di censi, chomo a partire 48 chubi per 6 censi di censo vienne questo rotto, cioè $\frac{8\ \textit{chubi}}{1\ \textit{censi di censo}}$, che schizzato sono $\frac{8\ \textit{dramme}}{1\ \textit{chosa}}$
[...]

Daß es eine gemeinsame Quelle gibt, ist nicht anzuzweifeln, und daß diese Quelle weder Antonio noch Benedetto ist folgt unter anderem daraus, daß Ms. Ottobon. lat. 3307 die fünfte Potenz auch hier als *chubo di censo* bezeichnet (aber auch durch die Notwendigkeit, z. B. $\frac{8\ \textit{dramme}}{1\ \textit{chosa}}$ durch den Umweg $\frac{8\ \textit{chubi}}{1\ \textit{censi di censo}}$ zu berechnen, und von der Anwendung des archaischen Ausdrucks »multiplicare via«. Da Benedettos Text scheinbar der ältere ist (1463 gegen »etwa 1465« [Van Egmond 1980: 190, 213]), kann man vermutlich auch Ms. Ottobon. lat. 3307 als Quelle ausschließen.[84] Positives zur Identifizierung der Quelle habe ich nicht finden können.

Außerhalb der Verbindungslinie zwischen Antonio und den drei Enzyklopädien befindet sich das Manuskript Florenz, Bibl. Naz., Fond. princ. II.V.152, vermutlich in Florenz gegen 1400 geschrieben [ed. Franci & Pancanti 1988b].[85] Wie wir sehen werden, ist der Autor (es scheint sich in der Tat um einen Autor und keinen bloßen Kompilator zu handeln) mathematisch kompetent. Desto aufschlußreicher sind die Schwierigkeiten, die ihm die Bezeichnungen für die Potenzen bieten [ed. Franci & Pancanti 1988b: 3–6].

Wie Antonio, aber in mehr Details, erklärt dieser Autor die Bedeutung von *cosa*, *censo* u.s.w. Er fängt mit der Erklärung an, daß die *cosa* eine Setzung (*posizione*) ist, die in vielen Problemen gemacht wird; daß diese Setzung eine Quantität von Zahl, von Zeit, von Ellen u.s.w.

---

[84] Ein endgültiges Argument dafür finden wir in den Einleitungen der beiden Manuskripte zur Algebra, wo Ottobon. lat. 3307 (fol. 303^{v}) eine gekürzte und verzerrte Version des Zitats aus Guglielmo de Lunis hat, das Benedetto voll und unverzerrt bringt, s. unten Note 103.

[85] Dagegen steht das Manuskript zweifellos in derselben breiten Tradition wie Jacopo, Dardi, Giovanni di Davizzo, Biagio und *Trattato dell'alcibra amuchabile*. Es bringt dieselben 20 algebraischen Fälle wie Jacopo und dazu die zwei fehlenden biquadratischen Fälle (aber wo Giovanni in einer Gleichung des Jacopo rechts und links umtauscht, tut das hiesige Manuskript es auch), es gibt dasselbe Diagramm für Multiplikation von Binomen wie Dardi, es spricht wie Biagio von Zahlen »che tal parte sia il primo del sechondo ...«. Schließlich, wo Dardi und Giovanni rationale Wurzeln »als ob sie irrational waren« behandeln ohne daraus einen Vorteil zu ziehen, da erklärt dieser Autor den Grund.

Es ist nicht unmöglich, daß dieser Autor direkten Zugang zu Biagios *Trattato* gehabt hat. Wie Biagio läßt er in vier Jahren 10000 £ auf 14641 £ anwachsen; wie dieser setzt er den Wert von 100 £ nach einem Jahr als *cosa – und wie Biagio schreibt er irrtümlicherweise 1000 £ statt 10000 £* (vgl. Note 56).

Doch muß er auch Quellen *gemeinsam* mit Biagio gehabt haben. In der algebraischen Lösung einer Aufgabe über ein geometrisch wachsendes Gehalt benutzt Biagio [ed. Pieraccini 1983: 89*f*] für einen unbekannten Geldbetrag *cosa*, das hiesige Manuskript [ed. Franci & Pancanti 1988b: 80–82] aber *censo*. Da der Autor nicht weiß, daß *censo* (als *māl*) ursprünglich ein Geldbetrag war – er findet die *cosa*, und muß deshalb quadrieren, um den *censo* zu finden – muß er eine Quelle haben, die näher an dem arabischen Hintergrund steht als Biagio; auf der anderen Seite ist die Übereinstimmung der Formulierungen so genau, daß Biagio aus derselben oder aus einer sehr ähnlichen Quelle geschöpft haben muß. Fast dieselbe Aufgabe findet sich bei Jacopo, nur sind alle Parameter bei ihm halb so groß, und die Lösung verläuft ohne *cosa*-Algebra.

sein kann; und daß sie »an sich nicht den Namen einer bestimmten Quantität hat, aber sicherlich bringt sie eine bestimmte Quantität hervor«.[86] Anscheinend originell – und ganz klar. Weiter wird dann gesagt, daß

> Eine *cosa* in sich selber multipliziert macht eine Wurzel, die ein *censo* genannt wird, so daß es dasselbe ist, ein *censo* zu sagen, wie eine Quantität, die eine Wurzel hat, von einer Zahl in sich selber multipliziert, so daß man sagen soll, daß wenn die *cosa* 4 in Zahl hervorbringt, muß der *censo* das Quadrat der *cosa* hervorbringen, das heißt, das, was 4 in sich selber multipliziert macht, das heißt, daß der Wert des *censo* 16 wird, da wir gesehen haben, daß 4 die Wurzel von 16 ist. So kommt es, daß die *cosa* die Wurzel des *censo* genannt wird, so daß es dasselbe ist, *censo* zu sagen als Wurzel aus Zahl.[87]

Auf den ersten Blick scheint es merkwürdig, daß der *censo* eine Wurzel *sei*, weil er die *cosa* als seine Wurzel *hat*. Daß es kein Irrtum ist, kann man im Folgenden sehen, denn ähnliche Formulierungen wiederholen sich für die höheren Potenzen.[88]

Mehrere Ursachen mögen zusammenspielen. Erstens vielleicht schlecht verstandener Einfluß der arabischen Tradition – ein Einfluß, der immer durchdringt, wenn geometrische Beweise gebracht werden. Hier wird die *cosa* mit der Wurzel identifiziert; das kann möglicherweise zur Generalisierung geführt haben, daß alle Potenzen als »Wurzeln« zu bezeichnen sind. Zweitens Wechselwirkung mit der Terminologie, die für die (in der *abbaco*-Algebra häufig vorkommenden) Umrechnungen $a = \sqrt{a^2}$ und $a = \sqrt[3]{a^3}$ benutzt wurde: a auf Wurzel bzw. Kubikwurzel zu bringen, »recare a radice/radice cubica« (wo das Ergebnis nur als a^2 bzw. a^3 angegeben wird). 6 »auf Kubikwurzel gebracht« ist also 216. Drittens ist eine Wechselwirkung mit Giovanni di Davizzos »Wurzeln« nicht völlig auszuschließen.

Für die Potenzen werden zuerst, wie wir sehen, die gewöhnlichen multiplikativen Benennungen *cosa – censo – cubo – censo di censo – cubo di censo* benutzt, und das schrittweise Aufsteigen durch Multiplikation wird gezeigt; mit Hilfe von Proportionen wird (z. B.) gezeigt, daß *censo* mal *censo* gleich *cubo* mal *cosa* ist.

---

[86] Vermutlich ein Echo von Sacroboscos Worten betreffs der Null (die »nichts bedeutet, aber zu bedeuten gibt«), die regelmäßig von *abbaco*-Büchern wiederholt werden.

[87] »una chosa in se medesimo multipricata'ffa una radice, la quale si chiama uno censo, sichè tanto vol dire uno censo quanto dire una quantità ch'à radice nata d'uno numero in sé multipricato, sichome sarebe a dire se'lla chosa producerà 4 per numero, il censo de' producere il quadrato della chosa, cioè quello che farà il 4 in sé multipricato, coè le 16 sarà la valuta del censo, sichè veduto è che'l 4 ene la radice del 16, chosì intervienne che'lla chosa si dice essere radice del censo, sichè tant'è dire censo quanto radice di numero.«

[88] Z. B., »Wenn die *cosa* 5 gilt [...], wird der *censo di censo* 625 gelten; so daß, Wurzel der Wurzel nehmend, wird es 5 sein und gleich der *cosa*. Also ist es so viel, *censo di censo* als Wurzel von Wurzel zu sagen«/»se la cosa varà 5 [...], il censo del censo varà 625; sichome chi pigliasse la radice della radice di 625, che sarebe 5 ed aguagliasi alla chosa. Adunque tant'è a dire censi di censo quant'è a dire radice di radice«; und später, »wenn die *cosa* 6 gelte, wird der *cubo di censo* 7776 gelten, und es gibt mehrere, die diese Wurzel *radice relata* benennen«/»se'lla chosa valesse 6, che'l chubo del censo varà 7776, e sono alquanti che questa chosì fatta radice chiamano radice relata«.

In der gewöhnlichen multiplikativen Terminologie (z. B. bei Giovanni di Davizzo) sind *cubo di censo* und *censo di cubo* identisch. Hier nicht so. Plötzlich wird *censo di cubo* durch Einbettung verstanden, also als die sechste Potenz (nämlich, so wird erklärt, weil die Quadratwurzel von 729 gleich 27 ist, und die Kubikwurzel davon gleich 3). Hier sind wir an die Grenze des Verständnisvermögens des Autors gekommen, denn wenig später wird gesagt, daß *cubo* mal *cubo* – also nochmals die sechste Potenz – »*cubo di cubo* macht, d. h. Kubikwurzel von Kubikwurzel«/»farà chubo di chubo coè radice chubicha di radice chubica«.

Bei Luca Pacioli [1494: I, 67^v], in einer Präsentation der Potenzen (*gradi*) »wie modern benannt«, finden wir beide Systeme weiter entwickelt – beide, weil »so viele Gegende, so viele Gebräuche«/»tante terre, tante usanze«, und »so viele Köpfe, so viele Meinungen«/»tot capita: tot sensus«. Im Rand stehen hier zusammen die numerierten »Wurzel«-Bezeichnungen, Abkürzungen der gewöhnlichen Namen und diese Namen voll geschrieben:

℞ 1^a	n^o	numero
℞ 2^a	co	cosa
℞ 3^a	ce	censo
℞ 4^a	cu	cubo
℞ 5^a	ce.ce	censo de censo
℞ 6^a	p^o r^o	primo relato
℞ 7^a	ce.cu	censo de cubo e anche cubo de censo
℞ 8^a	2^{o}r^o	secundo relato
℞ 9^a	ce.ce.ce.	censo de censo de censo
[...]	[...]	[...]
℞ 29^a	ce.ce.2^{o}r^o	censo de censo de secundo relato
℞ 30^a	[9^o] r^o	nono relato

Fol. 143$^{r–v}$ kehren Wurzelbezeichnungen und Abkürzungen zurück in einer Tabellierung der Produkte von Potenzen, jetzt kombiniert mit Potenzen von 2 als Identifizierung (℞ 11^a also identifiziert durch 1024).

In der obigen rechten Spalte sehen wir, daß alle Namen jetzt durch Einbettung hergestellt werden[89] – und alle diejenigen, die nicht so zusammengesetzt werden können, erscheinen als erster/zweiter/dritter/.../neunter *relato*. Das ist nicht sehr praktisch, aber auch die Arithmetisierung der Wurzelnamen ist unbequem, u.a. weil der Erfinder des Systems nicht wie Chuquet[90] gewagt hat die Zahl als »Stufe 0« einzuordnen. Der Multiplikation von Potenzen entspricht also keine Addition der »Exponenten«.

[89] Das verhindert nicht, daß (wirkliche) Wurzeln später (I, Fol. 182^r) mit Ausnahme der fünften Wurzel nach dem multiplikativen Prinzip hergestellt werden. Hier finden wir die folgende Sequenz:

℞ ($^2\sqrt{}$)– ℞.cuba ($^3\sqrt{}$) – ℞℞ ($^4\sqrt{}$) – ℞.relata ($^5\sqrt{}$)– ℞.cuba de ℞.cuba ($^6\sqrt{}$) –
℞℞℞.cuba ($^7\sqrt{}$) – 6℞℞℞.cuba de ℞.cuba ($^8\sqrt{}$) –
℞.cuba de ℞.cuba de ℞.cuba ($^9\sqrt{}$) – ℞℞℞.cuba de ℞.cuba ($^{10}\sqrt{}$)

[90] Ed. [Marre 1880: 737].

Versuche, Gleichungen höheren Grades *wirklich* zu lösen

Das oben erwähnte Manuskript Florenz, Bibl. Naz., Fond. princ. II.V.152 enthält keine falschen und auch keine »irregulären« algebraischen Regeln. An der Lösung irreduzibler Gleichungen höheren Grades ist der Autor jedoch interessiert. Nach der Darstellung der »22 Regeln« erklärt er [ed. Franci & Pancanti 1988b: 98], daß gewisse Probleme auf andere Weise lösbar sind; zu diesem Zweck braucht man aber »andere Wurzeln als diejenigen, von denen man gewöhnlich spricht, d. h. andere als Quadrat- und Kubikwurzeln«. Von diesen anderen erwähnt er nur einen Typus, nämlich »Kubikwurzel mit Hinzufügung einer Zahl«. Beispielsweise ist »die Kubikwurzel von 44 mit Hinzufügung von 5« gleich 4, weil $4^3 = 44+5\cdot 4$; generell ist, in Symbolen, die Kubikwurzel von n mit Hinzufügung von α gleich c wenn, in unseren schon benutzten Abkürzungen,

$$K = n+\alpha c$$

(also, wenn $c^3 = n+\alpha c$). Das ist genau einer der seit Gherardi falsch gelösten Fälle, und an sich dient die Kubikwurzel mit Hinzufügung nur dazu, die unbekannte Lösung dieser Gleichung mit einem Namen zu versorgen; als eigentlicher Fortschritt ist das kaum zu charakterisieren, und der Autor erklärt auch, daß diese Wurzel oft nicht [ganzzahlig] auffindbar und deshalb nicht sehr nützlich ist.

Wir sollen jedoch nicht vergessen, daß *abbaco*-Algebra (anders als *abbaco*-Geometrie) auch für irrationale Quadrat- und Kubikwurzel keine Approximationen gab; »Quadratwurzel von n« war also nicht mehr als eine Abkürzung für »die Lösung der Gleichung $Ç = n$«. Auch in viel späterer Mathematik stoßen wir auf ähnliches – an sich sind elliptische Funktionen nicht besser, so lange wir sie nicht approximativ tabellieren.

Von der Möglichkeit der numerischen Approximation abgesehen sind Quadratwurzel und elliptische Funktionen erst dadurch mathematisch ergiebig, daß sie die Etablierung von Netzwerken theoretischer Verbindungen erlauben. Genau solche Verbindungen etabliert auch unser Autor. Er löst keine einzige Aufgabe von Typus $K = n+\alpha c$ unter Anwendung der Kubikwurzel mit Hinzufügung; stattdessen gibt er Vorschriften für die Transformation von Gleichungen der Typen $K+\beta Ç = m$, $K = \beta Ç+m$ und $\beta Ç = K+m$ auf die Form $K = n+\alpha c$, und nur danach verwendet er zur Lösung die Wurzel mit Hinzufügung. Er zeigt auch [ed. Franci & Pancanti 1988b: 102], daß Lösungen selbst dann existieren können, wenn n eine Schuld, d. h. negativ ist.[91]

Er erklärt nicht, wie seine Transformationsregeln entstanden sind, aber die Details verraten es. Für unsere Bequemlichkeit können wir die Gleichung $K+\beta Ç = m$ als

$$t^3+3at^2 = m$$

schreiben. Komplettierung gibt dann

$$(t+a)^3 = m+a^3+3a^2t = m+a^3+3a^2(t+a)-3a^2\cdot a$$

– genau wie die Regel des Manuskriptes erzählt, in dieser Reihenfolge und ohne irgendeine

[91] Im aktuellen Fall zeigt er, daß die Kubikwurzel von »debito 80« mit Hinzufügung von 108 gleich 10 ist, da $108\cdot 10+(-80) = 10^3$.

Reduktion des Ausdrucks $m+a^3+3a^2(t+a)–3a^2 \cdot a$.

Der Autor spricht, wie erwähnt, von einer Vielzahl besonderer Wurzeln, erklärt aber nur diese eine. Mehrere *abbaco*-Bücher präsentieren jedoch eine *radice pronica*, die zur Familie gehört. Sie wird in zwei verschiedenen Weisen erklärt. Pacioli [1594: I, 115^v] tut es so:

> Unter *radice pronica* versteht man gewöhnlich eine Zahl, in sich selber multipliziert, und zu ihrem Quadrat die Wurzel der besagten Zahl hinzugefügt. Von dieser Summe wird diese Zahl *radice pronica* genannt. Wie 9 in sich selber multipliziert 81 macht, und zu 81 die Wurzel von 9 hinzugefügt, die 3 ist, es macht 84. Die *radice pronica* von 84 wird von Praktikern als 9 genommen.[92]

Unmittelbar hat das wenig mit dem Begriff von »pronischer Zahl« zu tun – eine Zahl von der Form $n \cdot (n+1)$. Dazu würde, durch Verallgemeinerung, eher der Wert 3 passen, da $3 \cdot (3^3+1) = 84$. Tatsächlich findet man sowohl bei Gilio [ed. Franci 1983:18f] wie in Pierpaolo Muscharellos *Algorismus* von 1478 [ed. Chiarini et al 1972: 163], daß die pronische Wurzel von 84 gleich 3 ist.[93]

Benedetto [ed. Pieraccini 1983: 26] mag uns die Auflösung geben; er zeigt jedenfalls, daß die pronische Wurzel zur Lösung von irreduziblen Gleichungen diente. In Verbindung mit der Aufgabe, wo Biagio »sich verliert« (s. Text vor Note 57), erwähnt er die pronische Wurzel, ohne zu erklären, was sie sei. Die Aufgabe (in unserer Notation $x^2+\sqrt{x} = 18$) hat als Lösung Paciolis pronische Wurzel von 18; wird sie zu $y^4+y = 18$ transformiert, ist die Lösung Gilios pronische Wurzel.

Pacioli mag von den Lösungen durch besondere Wurzeln gehört haben, findet sie aber nicht interessant. Nach seiner Observation [1994: I, 150^r], daß bis weiterem nur solche Gleichungen lösbar waren, wo die drei Potenzen in »gleichem Abstand« stehen, bemerkt er kurz, daß andere Gleichungstypen höchstens in besonderen Fällen und *a tastoni* gelöst werden können. Er hatte in dieser Bewertung recht – im Sinne, daß die besonderen Lösungen zu nichts führten; und er irrte sich zugleich – im Sinne, daß die Lösungen von einzelnen Gleichungstypen durch del Ferro, Tartaglia und Cardano nur Dank der *Transformationen*, die zusammen mit den besonderen Lösungen gingen, eine *allgemeine* Lösung der Gleichung dritten Grades schafften.

Schemata und Ansätze zur Symbolik

Diagramme für Multiplikation von Binomen, Abkürzungen für *cosa* und *censo* und die Pseudo-Bruchnotation für Vielfache von *cosa* und *censo* kamen schon um 1350 vor; bald tauchten auch formale Brüche auf. Ab Ende des 14. Jahrhunderts kommt dazu noch anderes.

Im mehrmals oben erwähnten Manuskript Florenz, Bibl. Naz., Fond. princ. II.V.152 [ed. Franci & Pancanti 1988b] finden wir nicht nur die Abkürzungen ℞ (*radice*), p (*più*), m (*meno*),

---

[92] »Per radice pronica communamente se intende numero multiplicato in se e sopra suo quadrato posto la radice de ditto numero de questa summa quel numero sia ditta radice pronica. Commo 9 multiplicato in se fa 81 e sopra 81 posto la radice de 9 che e 3 fa 84. La radice de 84 sia ditta da pratici 9«.

[93] Paciolis Wert 9 wird dagegen im Manuskript Florenz, Bibl. Naz., Palatino 575 [ed. Simi 1992: 20*f*] gegeben. Die Anwendung dieser besonderen Wurzel wird auch dort nicht erklärt.

ρ (*cosa*) und *c* (*censo*)[94] und das seit Dardi bekannte Diagramm für Multiplikation von Binomen. Für die Multiplikation von längeren Polynomen (z. B., *cose*+Zahl+√Zahl) wird eine Multiplikation *a chaselle* gelehrt [ed. Franci & Pancanti 1988b: 11], die die Multiplikation von Zahlen in vertikalen Kolonnen nachahmt.[95] Ähnliche Schemata finden wir nicht nur in späteren *abbaco*-Schriften (z. B., Vatikan, Ottobon. lat. 3307, Fol. 331ᵛ, und bei Raffaello Canacci, ed. [Procissi 1954: 316–322]), sondern auch in z. B. Stifels *Arithmetica integra* [1544: Fol. 123–125 und *passim*], bei Scheubel [1551: 3ᵛ*ff*], bei Peletier [1554: 15–22] und bei Ramus [1560: A iiiʳ].

In Vatikan, Ottobon. lat. 3307, Fol. 331ʳ finden wir im Rand eine interessante Kombination von formaler Bruchrechnung und rudimentärer Schematisierung. Es geht um eine Aufgabe $\frac{100}{1\rho}+\frac{100}{1\rho+7}=40$ (diese Brüche, ohne »+« und »=«, stehen schon im Text). Die Lösung geht über die Umformung $\frac{100\rho+100\cdot(\rho+7)}{(1\rho)\cdot(1\rho+7)}=\frac{100\rho+(100\rho+700)}{1\sigma+7\rho}=40$, weshalb 200ρ+700 = 40σ+280ρ; diese Lösung wird im Rand so geschrieben (der *censo* steht als σ; statt ρ steht eigentlich):

```
100ρ
100ρ   700
200ρ   700
  1σ    7ρ ___________ 40


200ρ    700 ——    40σ ⟨280ρ⟩
```

(das ausgelassene ⟨280ρ⟩ in der letzten Zeile steht im Text). Scheinbar funktionieren die Striche vor 40 und vor 40σ als Gleichheitszeichen; in der Tat wäre es besser, von einem allgemeineren »Konfrontationszeichen« zu reden, denn im Rand auf Fol. 338ʳ bedeutet ——— , daß ein erster Geschäftspartner $\frac{3000}{1\rho\ 5000}$, ein zweiter $\frac{4000}{1\rho\ 6000}$ hat.

Dasselbe »Gleichheitszeichen« finden wir in einem von Luca Pacioli 1478 geschriebenen Manuskript (Vatikan, Vat. lat. 3129), z. B. auf Fol. 67ᵛ. Wir müssen vermuten, daß die Gewohnheit verbreitet war.

Im Briefwechsel des Regiomontanus mit Bianchini [ed. Curtze 1902: 278] steht die Aufgabe $\frac{100}{1\rho}+\frac{100}{1\rho+8}=40$. Regiomontanus macht genau die gleiche schematische Rechnung; er schreibt (ρ ist jetzt zu erweitert; σ gibt hier , *census*, wieder):

---

[94] Der Ausgabe zufolge scheinen p, m, ρ und *c* nicht mit Strichen oder Bogen gekennzeichnet zu sein. Das Manuskript habe ich nicht gesehen.

[95] Scheinbar diejenige, die Giovanni de' Danti [ed. Arrighi 1987a: 16] als »sechondo l'arte nova« charakterisiert. Dagegen wurde im Maghreb (nach dem Djerba-Manuskript wie von Abdeljaouad [2002: 47] reproduziert) die Ordnung in schräg-gestellten Kolonnen benutzt, die de' Danti [ed. Arrighi 1987a: 16] als »a brichuocolo secondo l'arte vecchia«/»a schacchiera« charakterisiert. Der Unterschied ist zu klein, um nicht eine Maghreb-Inspiration zu vermuten, besonders da das Manuskript in anderer Hinsicht ziemlich direkten arabischen Einfluß bezeugt (vgl. oben, Note 85).

$$\frac{100}{1\ \rho} \qquad \frac{100}{1\ \rho\ \mathit{et}\ 8}$$

100 ρ et 800

<u>100 ρ</u>

$$\frac{200\ \rho\ \text{et}\ 800}{1\ \rho\ \text{et}\ 8\ \sigma} \text{ —— } 40$$

40 σ et 320 ρ —— 200 ρ et 800

40 σ et 120 ρ —— 800

1 σ et 3 ρ —— 20

Es besteht kein Zweifel, daß Regiomontanus ziemlich genau von einer Quelle aus derselben Familie wie Ottobon. lat. 3307 kopiert, obwohl er vermutlich seine eigene (nicht notwendigerweise von ihm erfundene) Abkürzung für *census* benutzt.

Manchmal schreibt Regiomontanus ρ und σ hochgestellt und nach den Koeffizienten.[96] Auch das hat er von der *abbaco*-Tradition: In Vatikan, Vat. lat. 3129 tut Pacioli dasselbe mit *cosa*, während □ (für *censo*) über den Koeffizienten steht; schon 1424 schreibt Vat. Lat. 10488 (z. B. Fol. 36^{v}–37^{v}, 38^{v}, 92^{r-v}) sowohl *cosa* als auch □ (zuweilen stattdessen als *cen* erscheinend) über den Koeffizienten.[97] In letzter Instanz kommt die Schreibweise vermutlich von der Maghreb-Algebra, vgl. z. B. [Tropfke / Vogel et al 1980: 376].

Das Problem Guglielmo de Lunis

Buch XIII von Benedettos *Trattato*, »La reghola de algebra amuchabale«, beginnt (nach einem dreizeiligen Untertitel) in dieser Weise:

> Geben wir Dank dem Höchsten, so beginnt der Text des arabischen Aghabar in der Regel des *geber*, welche wir Algebra nennen. Welche Regel der Algebra, nach dem Übersetzer Guglielmo de Lunis, diese 7 Namen enthält, nämlich *geber* [*al-jabr*], *elmelchel* [vielleicht *al-muqābalah*[98]], *elchal* [*al-qabilah*[99]], *elchelif* [vielleicht *al-khalās*, »Be-

[96] Curtze gibt das in seiner Ausgabe des Briefwechsels nicht wieder, aber vgl. [Curtze 1902: 233] mit der photographischen Reproduktion in [Cajori 1928: I, 96].

[97] Chuquets rechts hochgeschriebene Zahlen [ed. Marre 1880: 737], wo z. B. $12.^{2}$ für 12 *censo* steht, stammen vermutlich von derselben Gewohnheit.

[98] So Ulrich Rebstock (persönliche Mitteilung). Paul Kunitzsch (persönliche Mitteilung) schlägt stattdessen *al-mithāl* (allgemeine Bedeutungen »Gleichnis«, »Allegorie«, »Beispiel«, u.s.w.) vor; das folgende *asomigliare* würde dann dem arabischen *maṯala* entsprechen (»ähnlich sein«, »nachahmen«, »vergleichen«, u.ä.).

[99] Das Verschwinden des »b« zeigt, daß eine iberische Aussprache des Arabischen wiedergegeben wird (Ulrich Rebstock, persönliche Mitteilung).

freiung«/»Ordnung«[100]], *elfatiar* [?], *diffarelburam* [*difaʿ al-burhān*, »Verteidigung der Demonstration«[101]], *eltermen* [*al-tamām*[102]]. Welche Namen nach dem besagten Guglielmo so zu verstehen sind. *Geber* ist so viel wie *recuperatione* zu sagen, weil, wie im Folgenden zu verstehen sein wird, in der Wiederherstellung [*recuperatione*] von 2 gleichen Teilen der Fall zu lösen ist. *Elmelchel* ist so viel wie *exenplo* zu sagen, oder *asomigliamento*, weil die Lösung des Falls sich durch Gleichstellung [*asomigliare*] der gesetzten Größe zum gegebenen Fall findet. *Elchal* ist so viel wie *opositione* zu sagen, weil von 2 gefundenen Größen die eine der anderen entgegengestellt [*oposta*] ist, und wenn es nicht 2 entgegengestellte Größen gibt, ist der Fall unlösbar. *Elchelif* ist so viel wie *dispositione* zu sagen, weil, obwohl es 2 Größen gibt, wenn sie nicht geordnet sind für die Verwendung der Regeln, wäre der Fall außer der Regeln, und deshalb ist es notwendig, die Größen geordnet (*disposte*) zu haben. [...].[103]

Bei Raffaello Canacci finden wir eine ähnliche aber nicht identische Passage:

Die Regel der Algebra, welche Regel Guglielmo a Lunis vom arabischen in unsere Sprache übersetzt hat. Der besagte Guglielmo und andere sagen, daß diese von einem arabischen Meister von wirklich großer Einsicht gemacht ist, obwohl andere sagen, es sei einer, dessen Name Geber war, wozu Leonardo Pisano sagt, daß *algebra muchalbile* die Interpretation der Regel in dieser Sprache ist. Der Rest der besagten Regel beginnt: Geben[104] wir Dank dem Höchsten. Und nach dem besagten Guglielmo, enthält die besagte Regel in der besagten Sprache sieben Namen, nämlich, sieben Teile in der besagten Sprache genannt, *geber, el melchel, elchal, elchelis, elfatiar, diffarel buran, eltiemen* [...].[105]

---

[100] So Ulrich Rebstock. Paul Kunitzsch schlägt *al-taʾlīf* (»Formierung«, »Komposition« u.s.w.) vor.

[101] Vorschlag von Ulrich Rebstock. Paul Kunitzsch möchte *dafʿ al-burhān* lesen.

[102] »Vollständigkeit« u.ä. Von Paul Kunitzsch vorgeschlagen.

[103] »Rendiamo gratie all'Altissimo, chosì chomincia el testo de l'Aghabar arabico nella reghola del geber, la quale noi diciamo algebra. La quale reghola d'algebra, secondo Guglielmo de Lunis traslatore, inporta di questi 7 nomi cioè: *geber*, *el melchel*, *elchal*, *elchelif*, *elfatiar*, *diffar al buram*, *eltermen*. E' quali nomi, second el detto Guglielmo, sono chsì interpretati. *Geber* è quanto a dire recuperatione inperoché, chome per lo seguente si chonprenderà, nelle recuperatione di 2 parti iguali s'asolve il chaso. *Elmelchel* è quanto a dire exemplo, overo asomigliamento, inperoché l'asolutione de' chasi si truova per asomigliare la quantità posta al chaso dato. *Elchal* è quanto a dire opositione perché, di 2 quantità trovate, l'une è oposta all'altra, e quando non sono 2 quantità oposte il chaso è insolubile. *Elchelif* è quanto a dire dispositione inperoché, benché le 2 quantitá oposte sieno e non abbino dispositione a uso delle reghole, lo chaso sarebbe fuori delle reghole e però abisognia le quantità disposte«. [ed. Salomone 1982: 1].

Sehr ähnlich ist das Faksimile vom New York, Columbia, Ms. Plimpton 189 in [Smith 1908: Tafel gegenüber p. 462]. Insbesondere ist die Orthographie der beiden Manuskripte bei allen Transkriptionen arabischer Termini mit einer Ausnahme (*eltermem* statt *eltermen*) dieselbe.

[104] Canacci hat hier ein sinnloses »andano gratie«, wo Benedetto das sicherlich richtige »rendiamo gratie« hat.

[105] »*La regola* dell'algibra, la quale reghola Ghuolelmo a Lunis l'a traslato d'arabicho a nostra linghua, e sechondo el detto Ghuolelmo e altri dichono questa esser chomposta da uno maestro arabo invero di grande intelligenza, benché alchuno altri dichono esser stati uno del quale il nome era *Geber*, a che Lionardo Pisano dice che algebra muchalbile è'lla interpretatione della reghola in quella linghua. El resto della detta

Im weiteren stimmt Canaccis Zitat aus Guglielmo mit demjenigen Benedettos überein, nur verwendet er (in Übereinstimmung mit Jacopo und mit Antonio und Biagio wie von Benedetto wiedergegeben) *aghuaglamento* statt *asomigliamento*. Die bessere Wiedergabe von *al-khalāṣ* (wenn das wirklich der Ursprung ist) als *elchelis* und von *al-tamām* als eltiemen zeigt, daß Canacci den Text des Guglielmo nicht (oder nicht nur) durch Benedetto (der *elchelif* und *eltermen* oder *eltermem* schreibt) kennt.

1521 wiederholt Francesco Ghaligai Canaccis Einleitung, aber mit ausdrücklichem Hinweis auf Benedetto – vgl. [Karpinski 1910: 209]. Weiter schreibt er wie Benedetto *elchelif* und *eltermen*, und er übersetzt *elmelchel* als *assimigliamento*. Er muß also sowohl Benedettos Text, als auch den von Canacci oder einen Vorläufer davon kennen.

Es ist mehrfach angenommen wurden, daß die erwähnte Übersetzung des Guglielmo identisch mit dem lateinischen Text Oxford, Bodleian, Ms. Lyell 52 sei.[106] Dagegen gibt es mehrere starke Argumente. Erstens verwendet das Lyell-Manuskript überall *restaurare*, nicht *recuperare*.[107] Zweitens enthält es, wie schon Karpinski [1910: 211] bemerkt hat, keine Spur der arabischen Terminologie, während sämtliche Quellen für die Existenz einer Übersetzung durch Guglielmo (mit Ausnahme der Fehl-Zuschreibung einer Gherardo-Übersetzung [Hughes 1986: 223]) gerade diese Terminologie präsentieren *und nichts anderes*.[108]

Es gibt vielleicht noch eine Spur von Guglielmos Übersetzung. Im letzten, algebraischen Teil des *Liber abbaci* verwendet Fibonacci mehrmals statt des gewöhnlichen Terminus *census* das volkssprachliche *avere*. Es ist möglich, daß Fibonacci selber für diesen Wechsel verantwortlich ist – er spricht ja auch ein

---

reghola inchominca *andano* gratie all'altissimo. E'ssecondo el ditto Ghuolelmo la ditta reghola in quella linghua chontiene sette nomi, coè sette parti chosì nelle ditta linghua nominati: *Geber*, *elmelchel*, *elchal*, *elchelis*, *elfatiar diffarel buran*, *eltiemen* [...]«. [ed. Procissi 1954: 302]

[106] Ohne die These zu übernehmen, gibt Wolfgang Kaunzner [1985: 10–14] eine gute Übersicht. Der Text ist in [Kaunzner 1986] kritisch ediert.

[107] *Recuperatio* findet sich stattdessen, wie Karpinski [1910: 211] bemerkt, in der Überschrift zu New York, Columbia, Ms. Plimpton 188, Fol. 73ʳ (eine – 1456 geschriebene – korrigierte Version der Gherardo-Übersetzung, einst in Besitz des Regiomontanus; vgl. [Hughes 1986: 230] und [Folkerts 2006: V, 190]). Da zur selben Zeit *almuchabala* als *oppositio* erklärt wird, ist die *recuperatio* ganz deutlich eine sekundäre Einmischung, vielleicht von Kenntnis der Guglielmo-Übersetzung hervorgerufen, aber sicherlich kein Zeuge. Drei andere Gherardo-Manuskripte aus den 15. und 16. Jahrhundert sind in derselben Weise »verbessert« worden, s. [Hughes 1986: 229–321].

[108] Aus demselben Grund entfällt Jacques Sesianos Vorschlag [1993: 322*f*], die Algebra-Übersetzung Guglielmos mit der lateinischen Übersetzung von Abū Kāmil gleichzusetzen. Es gibt also keinen Grund, die Identifizierung von unserem Guglielmo mit dem (wenig) bekannten Übersetzer aus dem frühen 13. Jahrhundert zu bezweifeln. Die eben erwähnte Fehlzuschreibung, scheinbar aus dem späteren 13. Jahrhundert, macht auch Sesianos Annahme chronologisch unmöglich und unterstützt die Identifizierung.

paar Mal von *viadium* / *viagium*, und weiter von *guise* / *guice* (latinisierter Genitiv von *guisa*, ein Wort, das erst in 13. Jahrhundert im Italienischen belegt, aber vermutlich vom provenzalischen *guiza* entlehnt ist). Es ist aber auch möglich, daß er zu einer schon existierenden Terminologie greift – also zu einer Übersetzung, entweder ins Italienische oder in ein von der Volkssprache gefärbtes Latein. Wenn so, liegt die Vermutung nahe, daß Guglielmo dafür verantwortlich ist – besonders weil sowohl er wie Fibonacci mit dem sizilianischen Hof verbunden waren.

Die Verbindung zum deutschen Raum

Die Entstehung der deutschen Rechenmeister-Tradition und die Entwicklung deutsch- und lateinsprachiger Algebra im süddeutschen Raum im späteren 15. Jahrhundert sind zweifellos aus Italien inspiriert. Das ist jedem klar, der mit Kenntnis der italienischen Texte die deutschen Schriften öffnet. Weniger klar ist, durch welche und wie viele Kanäle die italienische Inspiration geflossen ist und *genau* wie viel von außen gekommen ist bzw. sich im deutschen Raum entwickelt hat.

Daß Regiomontanus sich für italienische (und, wie die florentinische Enzyklopädien, für al-Khwārizmī) Algebra interessierte, ist bekannt – vgl. [Folkerts 2006: V, VI, XII]. Wie eng er sich in seinen im Bianchini-Briefwechsel benutzten Rechnungen an das italienische Modell (mit formalen Rechnungen, Konfrontations- / Gleichheitszeichen und hochgestellten Abkürzungen) anschloß, haben wir oben gesehen. Dazu kommt noch mehr: Sein »Minus-Zeichen« wird öfters als ī (d. h. *in*) mit einem Schnörkel *us* interpretiert, ıꝗ.[109] Die Formen in einer photographischen Reproduktion von Rechnungen für den Briefwechsel mit Bianchini in [Cajori 1928: 96] – m̃ŋ, gelegentlich eher r̃ŋ – sehen eher wie eine Variante der traditionellen italienischen Form m̂ aus,[110] während eine Seite aus dem Ms. Plimpton 188[111] zweimal die Form ˜ꝯ, viermal aber die Form ~ꝯ (*mīus*) verwendet. Auf derselben Seite ist übrigens die Abkürzung für *res* einmal hochgeschrieben, aber mehrmals steht sie in der Zeile (und noch öfters finden wir das volle Wort *cosa*). Alles in allem scheint Regiomontanus im Gebrauch von Abkürzungen und formalen Rechnungen weder mehr noch weniger systematisch zu sein als die italienischen Zeitgenossen. Betreffend Schemata für Polynomialrechnung steht er deutlich hinter vielen Italienern zurück, vermutlich

---

[109] Z. B., [Tropfke/Vogel et al 1980: 206]; [Vogel 1954: Tafel VI].

[110] Diese Form finden wir z. B. im Chigi-Ms von Dardis *Aliabraa argibra*. Eine Verwandtschaft mit der eben so traditionellen Abkürzung m̃ scheint ausgeschlossen zu sein.

[111] Fol. 85^r, in guter Auflösung reproduziert auf http://columbia.edu/cgi-bin/dlo?obj=ds.Columbia-NY.NNC-RBML.6662&size=large.

weil er die Algebra *nur als Mittel* verwendet und keine Gesamtpräsentation bietet – die voll entwickelten Schemata kommen ja bei den *abbaco*-Autoren immer in systematischen Einleitungskapiteln vor.

Regiomontanus ist aber nicht der einzige Kanal – und in welchem Maß er ein direkter Kanal ist, ist schwer zu wissen. So finden wir in Friedrich Amanns Algebra viel mehr, als was er in einem kurzen Treffen mit dem jungen Regiomontanus (wie in [Folkerts 2006: VIII, 414] vorgeschlagen) hätte lernen können – auch Rechnungen mit formalen Brüchen wie $\frac{32\ \textit{res et}\ 45}{1\ \textit{census et}\ 3\ \textit{res}}$ [ed. Curtze 1895: 59]. Andererseits ist die Überschrift über die Algebra auf der in Note 111 erwähnten Seite *Regule de cosa et censo sex sunt capitula, per que omnis computatio solet calculari*, während Amann [ed. Curtze 1895: 50] mehr italienisch schreibt (*Regule dela cose secundum 6 capitola*) – auch das Manuskript des Regiomontanus hat Aamann also nicht benutzt.

In seiner Ausgabe der »deutschen Algebra« von 1481 bemerkte schon Vogel [1981: 10], daß sie auf mehreren Quellen baute. Zu Vogels Beobachtungen können wir jetzt zwei weitere hinzufügen. Erstens ist die »merkwürdig[e] Darstellung der cossischen Symbole unter einem Bruchstrich« genau diejenige, die wir zuerst in der *Trattato di tutta l'arte* und bei Dardi getroffen haben; sie kommt weder bei Regiomontanus noch bei Amann vor. Die Schreibweise »℞ von ℞« für die vierte Potenz ist auch deutlich mit der »Wurzel«-Schreibweise des Ms. Florenz, Bibl. Naz., Fond. princ. II.V.152 verwandt (s. Text um Note 86), während sie in früheren Algebra-Schriften des deutschen Raumes fehlt. Weiter stimmt die Idee, zum algebraischen Fall mit Doppellösung drei Beispiele anzubieten, mit Jacopo und Dardi überein, mit den deutschsprachigen Vorgängern aber nicht.

Schließlich können wir bemerken, daß sowohl Regiomontanus als auch Amann und die »deutsche Algebra« *census* buchstabieren, also florentinisch. Die »lateinische Algebra« [ed. Wappler 1887] verwendet dagegen eine Abkürzung, die der Schreibweise *zenso* entspricht – einer Schreibweise also, die wir im norditalienischen Bogen (Genova – Milano – Venedig) finden. Genau in dieser »lateinischen Algebra« ist ein interessanter Prozeß zu beobachten: Während weder Regiomontanus noch die Italiener ihre Abkürzungen systematisch – und also als Symbolik – verwenden, wird das in dieser Schrift gemacht (wie übrigens im kleinen lateinischen Zusatz zu Robert von Chesters Übersetzung von al-Khwārizmī [ed. Hughes 1989: 67], vermutlich auch im deutschen Raum im mittleren 15. Jahrhundert geschrieben). Es ist möglich, daß der Sprachwechsel, mit seiner Eliminierung der alltäglichen Resonanzen der Terminologie, zu dieser Technifizierung beigetragen hat; auch die soziale Integration mit der Universitätsbildung mag ihre Rolle gespielt haben. Das – und viel anderes – kann jedoch nur durch genauere Untersuchung der Quellen entschieden werden.

Bibliographie

Abdeljaouad, Mahdi, 2002. “Le manuscrit mathématique de Jerba: Une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité”. présenté au Septième Colloque sur l’histoire des mathématiques arabes (Marrakech, 30–31 mai et 1er juin 2002). *Mimeo.*

Arrighi, Gino (ed.), 1964. Paolo Dell’Abaco, *Trattato d’aritmetica*. Pisa: Domus Galilæana.

Arrighi, Gino, 1966. “La matematica del Rinascimento in Firenze: L’ereditá di Leonardo Pisano e le «botteghe d’abaco»”. *Cultura e scuola* **5**:18, 287–294.

Arrighi, Gino (ed.), 1967a. Antonio de’ Mazzinghi, *Trattato di Fioretti* nella trascelta a cura di M° Benedetto secondo la lezione del Codice L.IV.21 (sec. XV) della Biblioteca degl’Intronati di Siena. Siena: Domus Galilaeana.

Arrighi, Gino, 1967b. “Un «programma» di didattica di matematica nella prima metà del Quattrocento (dal Codice 2186 della Biblioteca Riccardiana di Firenze)”. *Atti e memorie dell’Accademia Petrarca di Lettere, Arti e Scienze di Arezzo,* Nuova Serie **38**, 117–128.

Arrighi, Gino (ed.), 1970. Francesco di Giorgio Martini, *La praticha di gieometria*. Dal codice Ashburnam 361 della Biblioteca Laurenziana di Firenze. Firenze: Giunti.

Arrighi, Gino (ed.), 1973. *Libro d’abaco.* Dal Codice 1754 (sec. XIV) della Biblioteca Statale di Lucca. Lucca: Cassa di Risparmio di Lucca.

Arrighi, Gino (ed.), 1982. Tommaso della Gazzaia, fl. 1387–1415, *Praticha di geometria e tutte misure di terre* dal ms. C. III. 23 della Biblioteca comunale di Siena. Trascrizione di Cinzia Nanni. Introduzione di Gino Arrighi. (Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, 1). Siena: Servizio editoriale dell’Università di Siena.

Arrighi, Gino (ed.), 1987a. Giovanni de’ Danti Aretino, *Tractato de l’algorisimo.* Dal Cod. Plut. 30. 26 (sec. XIV) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze. *Atti e Memorie della Accademia Petrarca di Lettere, Arti e Scienze*, nuova serie **47**, 3–91.

Arrighi, Gino (ed.), 1987b. Paolo Gherardi, *Opera mathematica: Libro di ragioni – Liber habaci*. Codici Magliabechiani Classe XI, nn. 87 e 88 (sec. XIV) della Biblioteca Nazionale di Firenze. Lucca: Pacini-Fazzi.

Arrighi, Gino (ed.), 1989. “Maestro Umbro (sec. XIII), *Livero de l’abbecho.* (Cod. 2404 della Biblioteca Riccardiana di Firenze)”. *Bollettino della Deputazione di Storia Patria per l’Umbria* **86**, 5–140.

Arrighi, Gino, 2004/1967. “Nuovi contributi per la storia della matematica in Firenze nell’età di mezzo: Il codice Palatino 573 della Biblioteca Nazionale di Firenze”, pp. 159–194 *in* Gino Arrighi, *La matematica nell’Età di Mezzo. Scritti scelti,* a cura di F. Barberini, R. Franci & L. Toti Rigatelli Pisa: Edizioni ETS. Zuerst veröffentlicht in *Istituto Lombardo. Accademia di scienze e lettere. Rendiconti, Classe di scienze (A)* **101** (1967), 395–437.

Arrighi, Gino, 2004/1968. “La matematica a Firenze nel Rinascimento: Il codice ottoboniano 3307 della Biblioteca Apostolica Vaticana”, pp. 209–222 *in* Gino Arrighi, *La matematica nell’Età di Mezzo. Scritti scelti,* a cura di F. Barberini, R. Franci & L. Toti Rigatelli Pisa: Edizioni ETS. Zuerst veröffentlicht in *Physis* **10** (1968), 70–82.

Boncompagni, Baldassare, 1851. “Della vita e delle opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo”. *Atti dell’Accademia pontificia de’ Nuovi Lincei* **5**, 5–9, 208–246.

Boncompagni, Baldassare (ed.), 1857. *Scritti* di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. I. Il *Liber abbaci* di Leonardo Pisano. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Bubnov, Nicolaus (ed.), 1899. Gerberti postea Silvestri II papae *Opera mathematica* (972 – 1003). Berlin: Friedländer.

Burnett, Charles, 2002. “Indian Numerals in the Mediterranean Basin in the Twelfth Century, with Special Reference to the ‘Eastern Forms’ ”, pp. 237–288 *in* Yvonne Dold-Samplonius et al (eds), *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical*

Ideas. (Boethius, 46). Stuttgart: Steiner.
Cajori, Florian, 1928. *A History of Mathematical Notations*. I. *Notations in Elementary mathematics*. La Salle, Illinois: Open Court.
Cardano, Girolamo, 1539. *Practica arithmetice, et mensurandi singularis*. Milano: Bernardini Calusco.
Cassinet, Jean, 2001. "Une arithmétique toscane en 1334 en Avignon dans la citè des papes et de leurs banquiers florentins", pp. 105–128 *in Commerce et mathématiques du moyen âge à la renaissance, autour de la Méditerranée*. Actes du Colloque International du Centre International d'Histoire des Sciences Occitanes (Beaumont de Lomagne, 13–16 mai 1999). Toulouse: Éditions du C.I.H.S.O.
Caunedo del Potro, Betsabé, & Ricardo Córdoba de la Llave (eds), 2000. *El arte del alguarismo*. Un libro castellano de aritmética comercial y de ensayo de moneda del siglo XIV. (Ms. 46 de la Real Colegiato de San Isidoro de León). Salamanca: Junta de Castilla y León, Consejeria de Educación y Cultura.
Caunedo del Potro, Betsabé, 2004. "*De Arismetica*. Un manual de aritmética para mercaderes". *Cuadernos de Historia de España* **78**, 35–46.
Chiarini, Giorgio, et al (eds), 1972. [Pierpaolo Muscharello], *Algorismus. Trattato di aritmetica pratica e mercantile del secolo XV*. 2 vols. Verona: Banca Commerciale Italiana.
Colebrooke, H. T. (ed., übers.), 1817. *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhascara*. London: John Murray.
Curtze, Maximilian, 1895. "Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im 15. Jahrhundert". *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* **7** (=*Supplement zur Zeitschrift für Mathematik und Physik* **40**), 31–74.
Curtze, Maximilian (ed.), 1902. *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance*. (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, vol. 12–13). Leipzig: Teubner.
Elfering, Kurt (ed., übers.), 1975. *Die Mathematik des Aryabhata I: Text, Übersetzung aus dem Sanskrit und Kommentar*. München: Wilhelm Fink.
Evans, Allan (ed.), 1936. Francesco Balducci Pegolotti, *La pratica della mercatura*. Cambridge, Mass.: The Medieval Academy of America.
Feliciano da Lazesio, Francesco, 1526. *Libro di arithmetica et geometria speculativa et praticale*. Venezia: Francesco de Leno.
Folkerts, Menso, 1978. "Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen *Propositiones ad acuendos iuvenes*. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition". *Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. Denkschriften*, 116. Band, 6. Abhandlung.
Folkerts, Menso, 2006. *The Development of Mathematics in Medieval Europe: The Arabs, Euclid, Regiomontanus*. (Variorum Collected Studies Series, CS811). Aldershot: Ashgate.
Franci, Rafaella (ed.), 1983. M° Gilio, *Questioni d'algebra* dal Codice L.IX.28 della Biblioteca Comunale di Siena. (Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, 6). Siena: Servizio Editoriale dell'Università di Siena.
Franci, R., & L. Toti Rigatelli, 1985. "Towards a History of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli". *Janus* **72** (1985), 17–82.
Franci, Raffaella, 1988a. "Antonio de' Mazzinghi: An Algebraist of the 14th Century". *Historia Mathematica* **15**, 240–249.
Franci, Raffaella, & Marisa Pancanti (eds), 1988b. Anonimo (sec. XIV), *Il trattato d'algibra* dal manoscritto Fond. Prin. II. V. 152 della Biblioteca Nazionale di Firenze. (Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, 18). Siena: Servizio Editoriale dell'Università di Siena.
Franci, Raffaella (ed.), 2001. Maestro Dardi, *Aliabraa argibra*, dal manoscritto I.VII.17 della Biblioteca Comunale di Siena. (Quaderni del Centro Studi della Matematica

Medioevale, 26). Siena: Università degli Studi di Siena.

Franci, Raffaella, 2002. "Trends in Fourteenth-Century Italian Algebra". *Oriens–Occidens* 2002 n° 4, 81–105.

Goldthwaite, Richard A., 1972. "Schools and Teachers of Commercial Arithmetic in Renaissance Florence". *Journal of European Economic History* **1**, 418–433.

Gregori, Silvano, & Lucia Grugnetti (eds), 1998. Anonimo (sec. XV), *Libro di conti e mercatanzie*. Parma: Università degli Studi di Parma, Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, Dipartimento di Matematica.

Grimm, Richard E., 1976. "The Autobiography of Leonardo Pisano". *Fibonacci Quarterly* **21**, 99–104.

Høyrup, Jens, 1999. "VAT. LAT. 4826: Jacopo da Firenze, *Tractatus algorismi*. Preliminary transcription of the manuscript, with occasional commentaries. *Filosofi og Videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter.* 3. Række: *Preprints og Reprints* 1999 Nr. 3.

Høyrup, Jens, 2005. "Leonardo Fibonacci and *Abbaco* Culture: a Proposal to Invert the Roles". *Revue d'Histoire des Mathématiques* **11**, 23–56.

Høyrup, Jens, 2006. "Jacopo da Firenze and the Beginning of Italian Vernacular Algebra". *Historia Mathematica* **33**, 4–42. DOI: 10.1016/j.hm.2005.03.001.

Høyrup, Jens, 2007a. "Jacopo da Firenze, *Tractatus algorismi*. An Edition of the Manuscript Milan, Trivulziana MS 90, Collated with Florence, Riccardiana MS 2236". *Filosofi og Videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter.* 3. Række: *Preprints og Reprints* 2007 Nr. 2.

Høyrup, Jens, 2007b. *Jacopo da Firenze's Tractatus Algorismi and Early Italian Abbacus Culture*. (Science Networks. Historical Studies, 34). Basel etc.: Birkhäuser.

Høyrup, Jens, 2007c. "What Did the Abbacus Teachers Really Do When They (Sometimes) Ended Up Doing Mathematics?". *Filosofi og Videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter.* 3. Række: *Preprints og Reprints* 2007 Nr. 4.

Høyrup, Jens, 2007d. "Generosity: No Doubt, but at Times Excessive and Delusive". *Journal of Indian Philosophy* **35** (2007), 469–485. DOI 10.1007/s10781-007-9028-2.

Hughes, Barnabas, O.F.M., 1986. "Gerard of Cremona's Translation of al-Khwārizmī's *Al-Jabr*: A Critical Edition". *Mediaeval Studies* **48**, 211–263.

Hughes, Barnabas B. (ed.), 1989. Robert of Chester's Latin translation of al-Khwārizmī's *Al-jabr*. A New Critical Edition. (Boethius. Texte und Abhandlungen zur Geschichte der exakten Naturwissenschaften, 14). Wiesbaden: Franz Steiner.

Karpinski, Louis C., 1910. "An Italian Algebra of the Fifteenth Century". *Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge **11**, 209–219.

Kaunzner, Wolfgang, 1985. "Über eine frühe lateinische Bearbeitung der Algebra al-Khwārizmīs in MS Lyell 52 der Bodleian Library Oxford". *Archive for History of Exact Sciences* **32**, 1–16.

Kaunzner, Wolfgang, 1986. "Die lateinische Algebra in MS Lyell 52 der Bodleian Library, Oxford, früher MS Admont 612", pp. 47–89 *in* G. Hamann (ed.), *Aufsätze zur Geschichte der Naturwissenschaften und Geographie*. (Österreichische Akademie der Wissenschaften, Phil.-Hist. Klasse, Sitzungsberichte, Bd. 475). Wien: Österreichische Akademie der Wissenschaften.

Kunitzsch, Paul, 2005. "Zur Geschichte der 'arabischen' Ziffern." *Bayerische Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-Historische Klasse. Sitzungsberichte*, 2005 no. 3, 1–39.

Lafont, R., & G. Tournerie (eds), 1967. Francès Pellos, *Compendion de l'abaco*. Montpellier: Édition de la Revue des Langues Romanes.

Lamassé, Stéphane, 2007. "Les problèmes dans les arithmétiques commerciales en langue française et occitane de la fin du Moyen Âge". *Thèse*, Université de Paris 1 Panthéon-Sorbonne, novembre 2007.

Libri, Guillaume, 1838. *Histoire des mathématiques en Italie*. 4 vols. Paris, 1838–1841.

Malet, Antoni (ed.), 1998. Francesc Santcliment, *Summa de l'art d'Aritmètica*. Vic: Eumo Editorial.

Marre, Aristide (ed.), 1880. "Le Triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet Parisien". *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche* **13** (1880), 593–659, 693–814.

Miura, Nobuo, 1981. "The Algebra in the *Liber abaci* of Leonardo Pisano". *Historia Scientiarum* **21**, 57–65.

Pacioli, Luca, 1494. *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*. Venezia: Paganino de Paganini.

Peletier, Jacques, 1554. *L'algebre*. Lyon: Ian de Tournes.

Pieraccini, Lucia (ed.), 1983. M° Biagio, *Chasi exenplari all regola dell'algibra nella trascelta a cura di M° Benedetto* dal Codice L. VII. 2Q della Biblioteca Comunale di Siena. (Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, 5). Siena: Servizio Editoriale dell'Università di Siena.

Procissi, Angiolo (ed.), 1954. "I Ragionamenti d'Algebra di R. Canacci". *Bollettino Unione Matematica Italiana*, serie III, **9**, 300–326, 420–451.

Raṅgācārya, M. (ed., übers.), 1912. The *Gaṇita-sāra-sangraha* of Mahāvīrācārya with English Translation and Notes. Madras: Government Press.

[Ramus, Petrus], 1560. *Algebra*. Paris: Andreas Wechelum.

Rebstock, Ulrich, 1993. *Die Reichtümer der Rechner (Ġunyat al-Ḥussāb) von Ahmad b. Ṯabāt (gest. 631/1234). Die Araber – Vorläufer der Rechenkunst*. (Beiträge zur Sprach- und Kulturgeschichte des Orients, 32). Walldorf-Hessen: Verlag für Orientkunde Dr. H. Vorndran.

Rebstock, Ulrich (ed., übers.), 2001. ʿAlī ibn al-Ḫiḍr al-Qurašī (st. 459 / 1067), *At-taḏkira bi-usūl al-hisāb wa l'farā'id* (*Buch über die Grundlagen der Arithmetik und der Erbteilung*). (Islamic Mathematics and Astronomy, 107). Frankfurt a.M.: Institute for the History of Arabic-Islamic Science at the Johann Wolfgang Goethe University.

Salomone, Lucia (ed.), 1982. M° Benedetto da Firenze, *La reghola de algebra amuchabale* dal Codice L.IV.21 della Biblioteca Comunale de Siena. (Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, 2). Siena: Servizio Editoriale dell'Università di Siena.

Salomone, Lucia (ed.), 1984. Leonardo Pisano, *E' chasi della terza parte del XV Capitolo del Liber Abaci della trascelta a cura di Maestro Benedetto* secondo la lezione del Codice L.IV.21 (sec. XV) della Biblioteca Comunale di Siena. (Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, 10). Siena: Servizio Editoriale dell'Università di Siena.

Scheubel, Johann, 1551. *Algebrae compendiosa facilísque descriptio, qua depromuntur magna Arithmetices miracula*. Parisiis: Apud Gulielmum Cavellat.

Sesiano, Jacques, 1984. "Une arithmétique médiévale en langue provençale". *Centaurus* **27**, 26–75.

Sesiano, Jacques (ed.), 1993. "La version latine médiévale de l'Algèbre d'Abū Kāmil", pp. 315–452 *in* M. Folkerts & J. P. Hogendijk (eds), *Vestigia Mathematica. Studies in Medieval and* Early Modern Mathematics in Honour of H. L. L. Busard. Amsterdam & Atlanta: Rodopi.

Silva, Maria do Céu, 2006. "The Algebraic Contents of Bento Fernandes' *Tratado da arte de arismetica* (1555)". *Preprint*, Centro de Matematica da Universidade do Porto, April 27, 2006. Erscheint in *Historia Mathematica*.

Simi, Annalisa (ed.), 1992. Anonimo fiorentino, *Regole di geometria e della cosa* dal Codice Palatino 575 (sec. XV) della Biblioteca Nazionale di Firenze. (Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, 20). Siena: Servizio Editoriale dell' Università di Siena.

Simi, Annalisa (ed.), 1994. Anonimo (sec. XIV), *Trattato dell'alcibra amuchabile* dal Codice

Ricc. 2263 della Biblioteca Riccardiana di Firenze. (Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, 22). Siena: Servizio Editoriale dell' Università di Siena.

Smith, David Eugene, 1908. *Rara arithmetica. A Catalogue of the Arithmetics Written Before the Year MDCI with a Description of Those in the Library of George Arthur Plimpton of New York*. Boston & London: Ginn.

Souissi, Mohamed (ed., übers.), 1969. Ibn al-Bannā', *Talkhīṣ a'māl al-ḥisāb*. Texte établi, annoté et traduit. Tunis: L'Université de Tunis.

Souissi, Mohamed (ed., übers.), 1988. Qalaṣādī, *Kašf al-asrār 'an 'ilm ḥurūf al-ġubār*. Carthage: Maison Arabe du Livre.

Spiesser, Maryvonne (ed.), 2003. *Une arithmétique commerciale du XV^{e} siècle*. Le *Compendy de la praticque des nombres* de Barthélemy de Romans. (De Diversis artibus, 70) Turnhout: Brepols.

Stifel, Michael, 1544. *Arithmetica integra*. Nürnberg: Petreius.

Travaini, Lucia, 2003. *Monete, mercanti e matematica. Le monete medievali nei trattati di aritmetica e nei libri di mercatura*. Roma: Jouvence.

Tropfke, J. / Vogel, Kurt, et al, 1980. *Geschichte der Elementarmathematik*. 4. Auflage. Band 1: *Arithmetik und Algebra*. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke. Berlin & New York: W. de Gruyter.

Ulivi, Elisabetta, 1996. "Per una biografia di Antonio Mazzinghi, maestro d'abaco del XIV secolo". *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* **16** (1996), 101–150.

Ulivi, Elisabetta, 2002. "Benedetto da Firenze (1429–1479), un maestro d'abbaco del XV secolo. Con documenti inediti e con un'Appendice su abacisti e scuole d'abaco a Firenze nei secoli XIII–XVI". *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* **22**, 3–243.

Van Egmond, Warren, 1977. "New Light on Paolo dell'Abbaco". *Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze* **2**:2, 3–21.

Van Egmond, Warren, 1978. "The Earliest Vernacular Treatment of Algebra: The *Libro di ragioni* of Paolo Gerardi (1328)". *Physis* **20**, 155–189.

Van Egmond, Warren, 1980. *Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600*. (Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze. Monografia N. 4). Firenze: Istituto e Museo di Storia della Scienza.

Van Egmond, Warren, 1983. "The Algebra of Master Dardi of Pisa". *Historia Mathematica* **10**, 399–421.

Vogel, Kurt (ed.), 1954. Die *Practica* des *Algorismus Ratisbonensis*. Ein Rechenbuch des Benediktinerklosters St. Emmeram aus der Mitte des 15. Jahrhunderts. (Schriftenreihe zur bayerischen Landesgeschichte, 50). München: C. H. Bech.

Vogel, Kurt (ed., übers.), 1968. *Ein byzantinisches Rechenbuch des frühen 14. Jahrhunderts*. (Wiener Byzantinische Studien, 6). Wien: Institut für Byzantinistik der Universität Wien / Hermann Bohlau.

Vogel, Kurt, 1977. *Ein italienisches Rechenbuch aus dem 14. Jahrhundert (Columbia X 511 A13)*. (Veröffentlichungen des Deutschen Museums für die Geschichte der Wissenschaften und der Technik. Reihe C, Quellentexte und Übersetzungen, Nr. 33). München.

Vogel, Kurt (ed.), 1981. *Die erste deutsche Algebra aus dem Jahre 1481*, nach einer Handschrift aus C 80 Dresdensis herausgegeben und erläutert. (Bayerische Akademie der Wissenschaften. mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Abhandlungen. Neue Folge, Heft 160). München: Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

Wappler, Hermann Emil, 1887. "Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert", pp. 1–32 *in Gymnasium zu Zwickau. Jahresbericht über das Schuljahr von Ostern 1886 bis Ostern 1887*. Zwickau: R. Zückler.

Woepcke, Franz, 1853. *Extrait du Fakhrî, traité d'algèbre* par Aboû Bekr Mohammed ben Alhaçan Alkarkhî; *précédé d'un mémoire sur l'algèbre indéterminé chez les Arabes*. Paris: L'Imprimerie Impériale.