

## Rekursion og ”dynamisk programmering”

Rekursion: ”at en procedure kalder sig selv” — eller et antal metoder kalder hinanden gensidigt.

Meget elegant til ting, som er rekursive af natur!

### Eksempel: Binær søgning

```
private static int binarySearch( Comparable [ ] a, Comparable x,  
                                int low, int high )  
{ if( low > high ) return -1  
  int mid = ( low + high ) / 2;  
  if( a[ mid ].compareTo( x ) < 0 )  
    return binarySearch( a, x, mid + 1, high );  
  else if( a[ mid ].compareTo( x ) > 0 )  
    return binarySearch( a, x, low, mid - 1 );  
  else  
    return mid;}
```

Tidsforbrug:  $\log n$ .

- Implementation ved stak (tager compileren sig af)
- Optimeringer ved bl.a. halerekursion (compiler producerer samme kode som var det skrevet med ”for” eller ”while”).
- Dvs. for binær søgning som overfor kan rekursionsstakken helt undgås

## Eksempler hvor rekursion er elegant

—rekursivt definerede datastrukturer,  
f.eks. et træ (eksempel om et øjeblik)

—compiler og sprog

```
<sætning> ::= if( <betingelse> ) <sætning> ;  
           | while( <betingelse> ) <sætning> ;  
           | ...
```

Datastrukturen er syntakstræer;

Parser, evt. hele compiler (Pascal, men ikke Java)

er en samling rekursive procedurer, én for hver syntaktisk kategori.

—matematiske definitioner ofte rekursive

## Træer: rekursiv datastruktur og tilhørende rekursive algoritmer

anvendelser: søgetræer, syntakstræer,...

### Eksempel: Simple træer med tal

```
public class TreesWithNumbers
{ private TreesWithNumbers left; private TreesWithNumbers right;
  private int value;

  public TreesWithNumbers(int n) {value = n;};

  public TreesWithNumbers(TreesWithNumbers left, int n,
                          TreesWithNumbers right)
  {this.left=left; value=n; this.right=right;};

  ....

  public static void main( String [ ] args )

  { TreesWithNumbers t =
    new TreesWithNumbers( new TreesWithNumbers(5),
                          10,
                          new TreesWithNumbers( new TreesWithNumbers(8),
                                                  6,
                                                  new TreesWithNumbers(17)
                                                  )
                          );
    System.out.println("Træet " + t + " har sum " + t.sum());
    t.pp();
  }
}
```

## Rekursive metoder til rekursive strukturer.

*Det er fristende at skrive*

```
public String toString()  
    {return "(" + left.toString() + "[" + value + "]" + right.toString() + ")};
```

*Denne her er bedre:*

```
public String toString()  
    {return "("  
        + (left==null ? "" : left.toString())  
        + "[" + value + "]"  
        + (right==null ? "" : right.toString())  
        + ")};
```

(([5])[10](([8])[6]([17])))

## At summe værdierne sammen:

*Det er fristende at skrive*

```
public int sum()
{return left.sum() + value + right.sum();};
```

*Denne her er bedre*

```
public int sum()
{return (left==null ? 0 : left.sum())
    + value
    + (right==null ? 0 : right.sum());};
```

## **Matematiske definitioner,**

f.eks.  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$

```
public class Factorial
{ public static long factorial( int n )
  {if( n <= 1 ) return 1;
   else return n * factorial( n - 1 ); }

  public static void main( String [ ] args )
  {for( int i = 1; i <= 10; i++ )
    System.out.println( factorial( i ) );}}
```

## Eksempel: Fibonacci-tal

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... hvad er systemet?

```
public static int fib1(int n)
{if(n<=1) return n;
 else return fib1(n-1) + fib1(n-2);}
```

Elegant, smukt, ubrugeligt

... eksempel på "del-og-hersk" når det *ikke virker*

... vi vender tilbage til eksemplet!

## Iøvrigt: Hvem var Fibonacci:

Italiensk forfatter, filosof, rejsende (??) Leonardo Pisano (ca. 1170–1250)



Billede lånt på <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/PictDisplay/Fibonacci.html>

## En programmeringsteknik: Del og hersk

### Generelt mønster:

```
public static Løsning løs(Problem p)
{
    if(simpel(p)) return løsningen-på-det-simple-problem;
    split p op i p1, ..., pn;
    L1 = løs p1;
    L2 = løs p2;
    ...
    Ln = løs pn;
    return kombiner(L1, L2, ..., Ln);
}
```

### Det bedste eksempel: Binær søgning:

```
private static int binarySearch( Comparable [ ] a, Comparable x,
                                int low, int high )
{
    if( low > high ) return -1;

    int mid = ( low + high ) / 2;

    if( a[ mid ].compareTo( x ) < 0 )
        return binarySearch( a, x, mid + 1, high );
    else if( a[ mid ].compareTo( x ) > 0 )
        return binarySearch( a, x, low, mid - 1 );
    else
        return mid;
}
```

Opsplitning af problem i ét delproblem som er halvt så stort.  
Omkostning for at »kombinere«: konstant.

Tidsforbrug:  $\log n$ .

**Andre eksempler:** Sortering, f.eks. mergesort



## Generel formel til vurdering af tidsforbrug

```
public static Løsning løs(Problem p)
{ if(simpel(p)) return løsningen-på-det-simple-problem;
  split p op i p1, ..., pA;
  L1 = løs p1;
  L2 = løs p2;
  ...
  LA = løs pA;
  return kombiner(L1, L2, ..., LA); }
```

### Parametre:

$A$ , antallet af delproblemer

$B$ , mål for relativ størrelse af delproblem (f.eks.  $B=2$  for halvering)

$k$ , bestemt ved "overhead"  $\Theta(N^k)$  (= prisen for at "splitte+kombinere")

$$T(N) = \begin{cases} O(N^{\log_B A}) & \text{hvis } A > B^k \\ O(N^k \log N) & \text{for } A = B^k \\ O(N^k) & \text{for } A < B^k \end{cases}$$

**Anvende den på binær søgning ....**

## Del-og-hersk-version af maksimum-sum-problemet

```
/**
 * Recursive maximum contiguous subsequence sum algorithm.
 * Finds maximum sum in subarray spanning a[left..right].
 * Does not attempt to maintain actual best sequence.
 */

private static int maxSumRec(int []a,int left, int right)
{ int maxLeftBorderSum = 0, maxRightBorderSum = 0;
  int leftBorderSum = 0, rightBorderSum = 0;
  int center = ( left + right ) / 2;

  if( left == right ) // Base case
    return a[ left ] > 0 ? a[ left ] : 0;

  int maxLeftSum = maxSumRec( a, left, center );
  int maxRightSum = maxSumRec( a, center + 1, right );

  for( int i = center; i >= left; i-- )
  { leftBorderSum += a[ i ];
    if( leftBorderSum > maxLeftBorderSum )
      maxLeftBorderSum = leftBorderSum; }

  for( int i = center + 1; i <= right; i++ )
  { rightBorderSum += a[ i ];
    if( rightBorderSum > maxRightBorderSum )
      maxRightBorderSum = rightBorderSum; }

  return max3( maxLeftSum, maxRightSum,
              maxLeftBorderSum + maxRightBorderSum );
}
```

### Princippet:

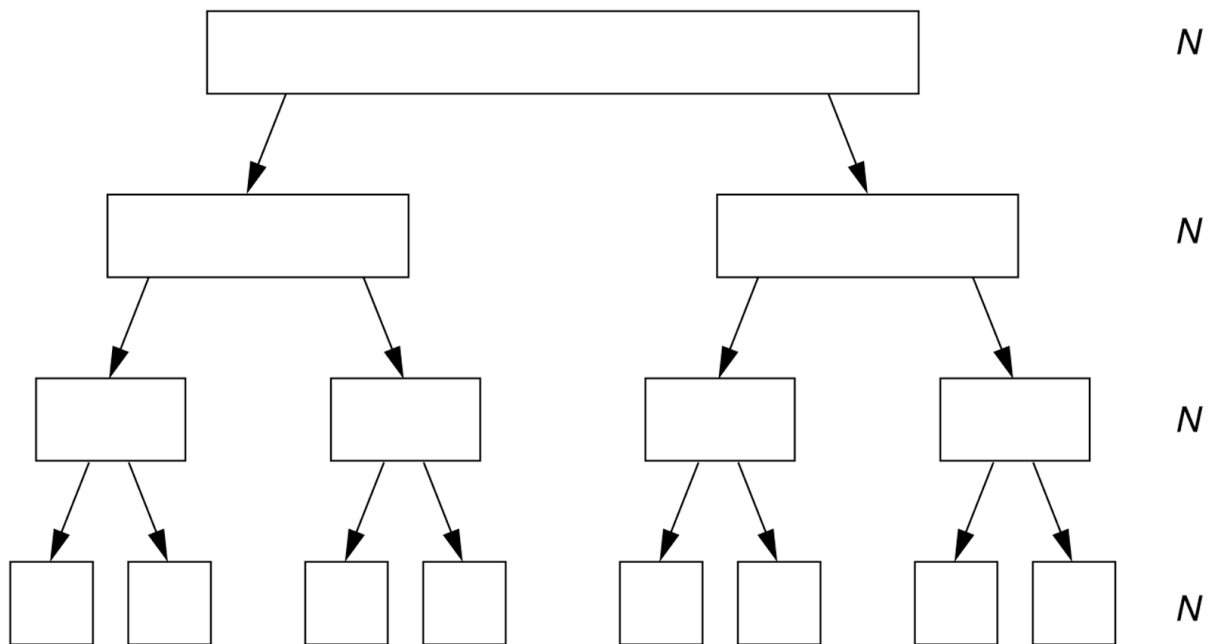
--	--

Her?

eller her?

eller her??

## Træ over rekursive kald for $n=8$



### Uformel analyse:

Hvert lag: De to indre løkker skal tilsammen trille alle ( $= n$ ) elementer igennem.

Det er  $\log n$  lag, dvs. ialt:  $n \log n$

### Ved brug af formel:

$A$ : Antal delproblemer  $= 2$ .

$B$ : Delproblemernes relative størrelse, halvering, dvs.  $B = 2$

$k$ : »Overhead«  $= n$ ;  $n^k = n$ , dvs.  $k = 1$

Formlens 2. tilfælde:  $A=B^k$ ,  $2=2^1$

Dvs.  $O(n^k \log n) = O(n^1 \log n) = O(n \log n)$

## Dynamisk programmering

**Princippet:** Vi skal løse et problem  $P(n)$

Hvis vi, for at løse  $P(n)$  får brug for, direkte eller indirekte, at kende løsningen på  $P(1), P(2), \dots, P(n-1)$ , så beregner vi dem alle fra en ende af og lægger dem i et array.

### Eksempel: Fibonacci ved dynamisk programmering

```
public static int fib2(int n) //assume n>=2
{ int [] fibs = new int [n+1];
  fibs[0] = 0; fibs[1] = 1;
  for(int i=2; i<= n; i++)
    fibs[i] = fibs[i-1]+fibs[i-2];
  return fibs[n];}
```

0	1								
0	1	2							
0	1	2	3						
0	1	2	3	5					
0	1	2	3	5	8				
0	1	2	3	5	8	13			
0	1	2	3	5	8	13	21		
0	1	2	3	5	8	13	21	34	

## Eksempel, at give byttepenge

```
public final class MakeChange
{ public static void makeChange( int [ ] coins, int differentCoins,
    int amount, int [ ] coinsUsed )
    { coinsUsed[ 0 ] = 0;
      for( int count = 1; count <= amount; count++ )
      { int minCoins = count;
        for( int j = 0; j < differentCoins; j++ )
        { if( coins[ j ] > count ) // Cannot use coin j
          continue;
          if( coinsUsed[ count - coins[ j ] ] + 1 < minCoins )
            minCoins = coinsUsed[ count - coins[ j ] ] + 1;
        };
        coinsUsed[ count ] = minCoins;}}

public static void main( String [ ] args )
{ // The coins and the total amount of change
  int numCoins = 5;
  int [ ] coins = { 1, 5, 10, 21, 25 }; // required: a 1-coin
  int change = 117;
  int [ ] used = new int[ change + 1 ];
  makeChange( coins, numCoins, change, used );

  System.out.println( "Best is " + used[ change ] + " coins" );}}
```

NB: Variabelnavne ændret og overflødigt argument (lastCoin) fjernet i forhold til bogen.

## Afsluttende øvelse: 4 måder at beregne Fibonacci-tal på:

```
// "Divide & conquer" - not recommended  
public static int fib1(int n)  
{if(n<=1) return n;  
  else return fib1(n-1) + fib1(n-2);}
```

```
// "Dynamic programming"
public static int fib2(int n) //assume n>=2
{ int [] fibs = new int [n+1];
  fibs[0] = 0; fibs[1] = 1;
  for(int i=2; i<= n; i++)
    fibs[i] = fibs[i-1]+fibs[i-2];
  return fibs[n];}
```

```
// "Memoization"
private static HashMap table = new HashMap();

public static int fib3(int n)
{ Object resultCell;
  if((resultCell = table.get(new Integer(n)))!= null )
    return ((Integer)resultCell).intValue();
  else
    {int result;
     if(n<=1) result=n;
     else result=fib3(n-1) + fib3(n-2);
     table.put(new Integer(n), new Integer(result));
     return(result);};}
```



```
// "Direct algorithm"  
// - can be seen as optimized DynProg or memo  
// ... however in the long run outperformed by Memo!  
public static int fib4(int n)//assume n>=2  
{int f0=0; int f1=1; int buf;  
  for(int i=2;i<=n;i++)  
    f1= f0+(f0=f1);  
  return f1;};
```

## **Afslutning:**

- *Rekursion* er elegant for de rigtige problemer
- *Del-og-hersk* er en måde at forstå mange rekursive algoritmer på, f.eks. søgning og sortering
- ”*Dynamisk programmering*” er en lignende, ikke rekursiv teknik, som er god når et problem splittes op i ”lignende, men mindre” delproblemer – og specielt når samme delproblem kan optræde flere gange.
- *Memoisering* er kan ses som dyn.prog. med langtidshukommelse, og som kun beregner det, der er brug for.
  - kræver en tungere datastruktur, men tjener sig ind i længden