Hashing og hashtabeller

Teknik til at repræsentere mængder

- ***Konstant tid*** for finde og indsætte
- men ***ingen "sortering"*** af elementerne

Specielt udviklet til

- Meget stort "udfaldsrum"
- ... hvor faktiske mængder er *relativt* små i forhold til udfaldsrum

Standardeksempel nr. 1:
Udfaldsrum = mængden af alle mulige navne på variable, klasser ...
Faktisk mængde = mængden af alle navne i et bestemt Javaprogram

Dagens program

- Indledningsøvelse: repræsentation af mængder over små udfaldsrum
- Princippet i Hashing: Om hashingfunktioner
- "Kollisioner", dvs. to forskellige objekter "hasher" til samme tal
- Løsning på problemet 0: Hægtede lister
- Løsning på problemet 1: Lineær afprøvning
- Løsning på problemet 2: Kvadratisk afprøvning
- Kort om implementation i Javas API
    - Med en lille afstikker om at heltal i Java er skøre

"Hashing" ???

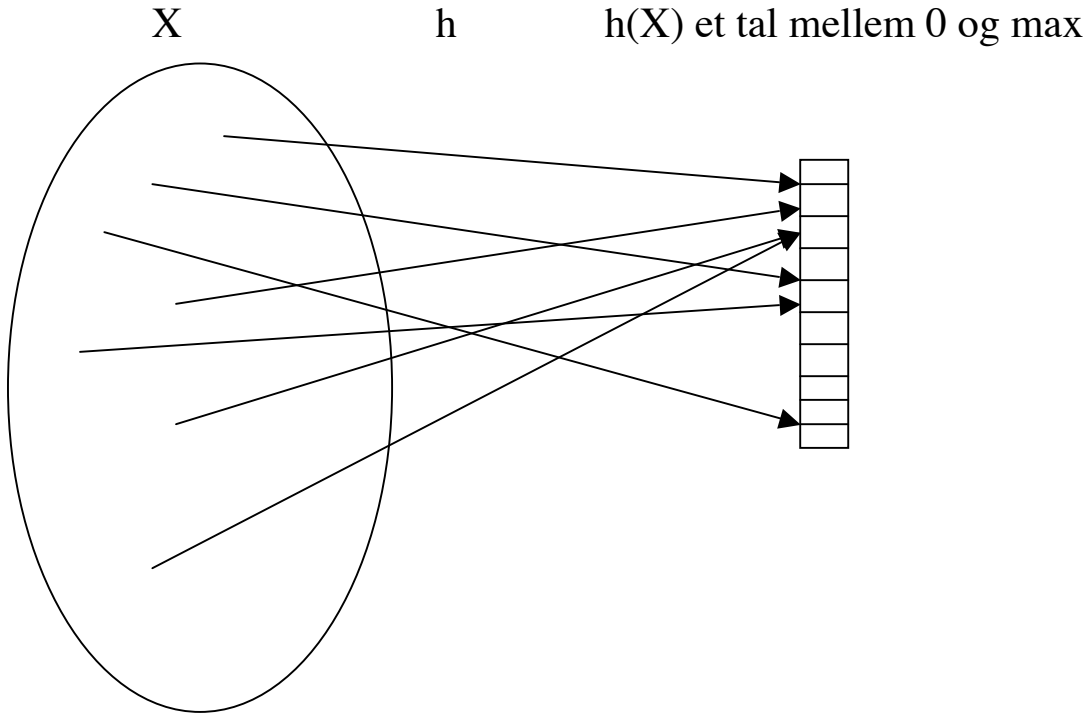
Ordbogsopslag:

> **hash v.t.** (VP 1, 10 with up) chop or cut up (meat) into small pieces. **n. 1.** [U] (dish of) cooked meat,~ed and re-cooked. **2.** (fig.) ***make a ~ of sth.,*** do it very badly, make a mess of it. ***settle sb.'s ~,*** deal with him in such a way that he gives no more trouble.

Teknik til repræsentation af mængder over

- Meget stort "udfaldsrum"
- ... hvor faktiske mængder er *relativt* små i forhold til udfaldsrum

Ideen: at afbilde stort adresserum over i et lille:



Indledende øvelse: Repræsentation af mængder over små udfaldsrum

Pascal *(Wirth, ca. 1974)*

```
type fisk = (torsk, sild, rødspætte, kuller, kulmule, fjæsing, gråsej,
             pighvar, slethvar, laks, ørred, tobis);

var nogle_fisk, flere_fisk, endnu_flere_fisk : set of fisk;

nogle_fisk := [torsk..kuller, tobis, slethvar];

flere_fisk := [torsk, rødspætte..fjæsing, laks, slethvar];

endnu_flere_fisk := nogle_fisk + flere_fisk; // foreningsmgd nogle_fisk U flere_fisk
```

Compileren tildeler hvert symbol et nummer

torsk -> 0
sild -> 1
...
tobis -> 11

En mængde er en bitvektor, f.eks.

nogle_fisk = 111100001001
flere_fisk = 101111000100
endnu_flere_fisk = 111111001101 "+" eller "U" implementeret ved bitvis logisk "eller"

OBS: Java understøtter bitvise operationer, så princippet kan eftergøres — men man må selv lege compiler!

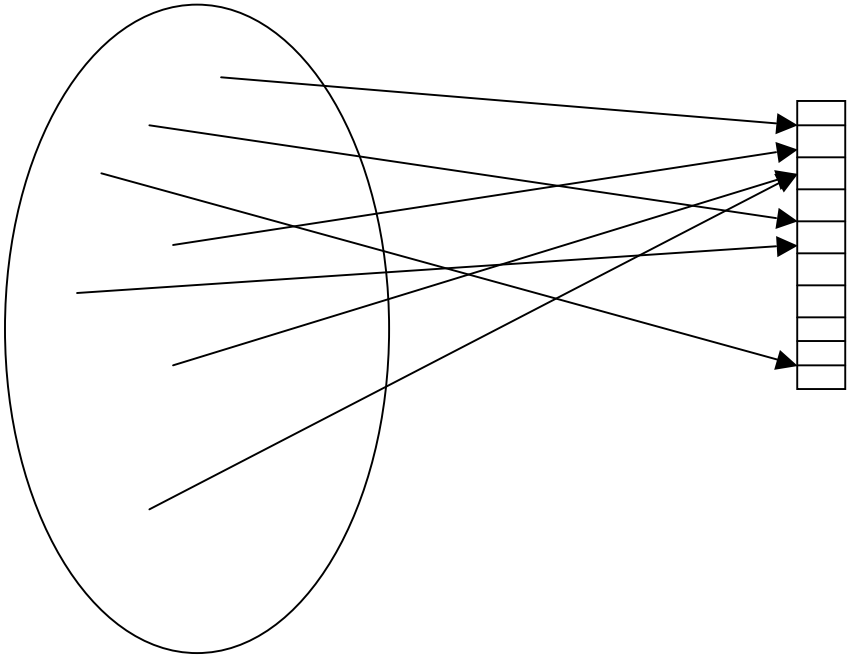
Forslag:
```
static final int torsk = 1;
static final int sild = 2;
static final int rødspætte = 4;
static final int kuller = 8;
```

```
int nogle_fisk  = torsk+sild+rødspætte+kuller+tobis+slethvar;
```

```
endnu_flere_fisk = nogle_fisk | flere_fisk; //bitvis "eller"
```

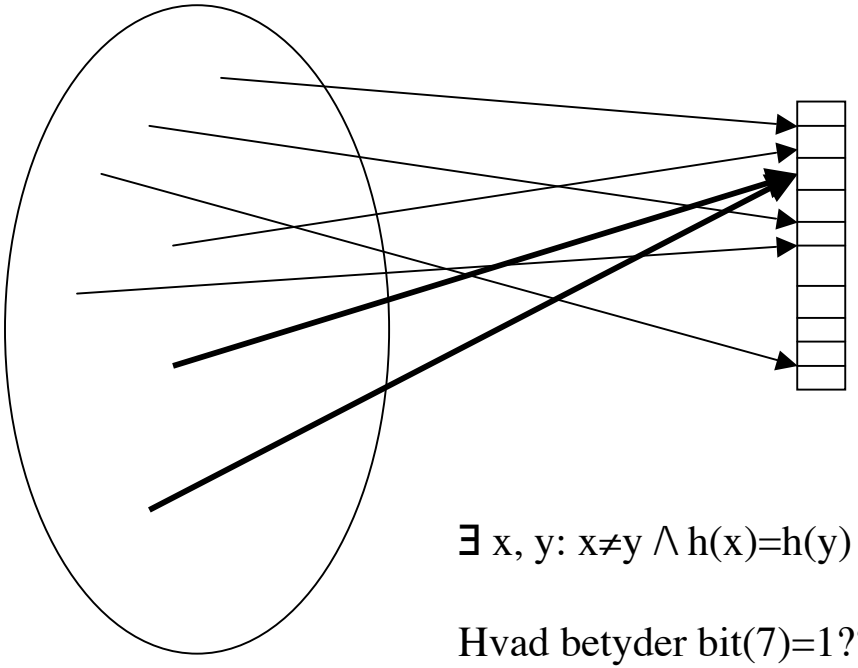
Princippet i Hashing: Komprimere adresserum vha hashfunktion

X h h(X) et tal mellem 0 og max



Og bruge princippet fra bitvektoren: 1 ≈ jeg er med; 0 ≈ jeg er ikke med.

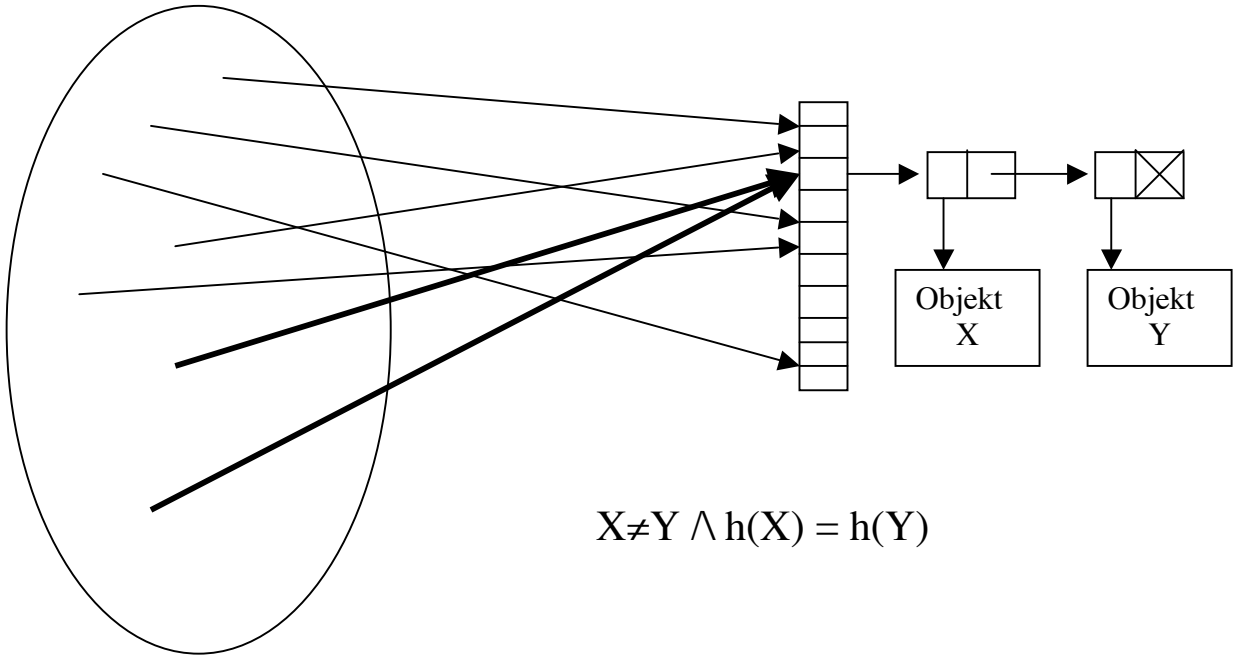
Problem: Kollision, når to elementer hasher til samme værdi



$\exists$ x, y: x≠y /\ h(x)=h(y)

Hvad betyder bit(7)=1??

En mulig løsning på problemet, hægtet liste af objekter:



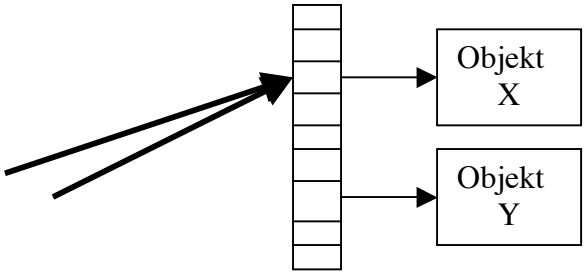
$X \neq Y \wedge h(X) = h(Y)$

Nu ikke bitvektor men array 0..max af hægtede lister af objekter (dvs. repræsentation af objekter i den store mængde (udfaldsrummet).

Ikke populær da det giver ekstra arbejde med at forfølge referencer hver gang, selv når tabellen er stort set tom!

Den sædvanlige løsninger på problemet

Hvis pladsen er optaget så find en anden plads i tabellen (efter fast algoritme):



Af finde Y i tabellen:

Hvis tabel(h(Y)) tom, så er Y ikke med;
Hvis tabel(h(Y)) refererer til objekt Y så OK;
Hvis tabel(h(Y)) refererer til objekt X (≠Y) så prøv andet steds...;

Kunsten at finde en anden plads i tabellen
Den oplagte metode: "Linear probing"

Prøv næste ubrugte celle:

Antag
h(X) = h(Y) = 117
h(Z) = 118
h(Æ) = 117

117: X	**117:** X	117: X	**117**: X
118:	118: Y	**118:** Y	118: Y
119:	119:	119: Z	119: Z
120:	120:	120:	120: Æ
...	...	...	...

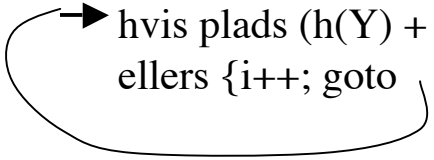
Fordele: Virker altid indtil tabellen er helt fuld

Ulemper: Der dannes klumper.
Dvs. for mange indsætte og finde kolliderer flere gange!

(Kræver et matematisk argument, som vi springer over;
intuitivt: Når en klump er opstået har den tendens til at vokse!)

Den mest udbredte strategi: "Quadratic probing"

hvis plads h(Y) er ledig placér Y der;
ellers {i = 1;
hvis plads (h(Y) + i^2)% tabelstørrelse ledig, så placér Y der;
ellers {i++; goto } ; }



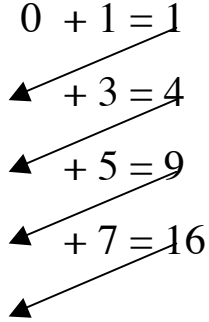
Hvad får vi ud af det? En matematiker kan bevise:

- Klumpningsgraden mindre
- Hvis tabelstørrelse er et primtal, så besøges halvdelen af alle celler i værste fald
- Dvs. fyldningsgrad på 50% eller derover er ikke godt!

Tag det som et kuriøst faktum; ikke eksamenspensum at redegøre for det!!

NB: Bogen gør et nummer ud af at **optimere beregningen** så multiplikation og modulo operation undgås

0^2 = 0
1^2 = 0 + 1 = 1
2^2 = + 3 = 4
3^2 = + 5 = 9
4^2 = + 7 = 16
...



```
currentPos += 2 * ++collisionNum -1;
if (currentPos>= array.length) currentPos –=
                                    array.length;
```

OBS-OBS-OBS:

- En god compiler oversætter "2 *" til højreskift
- En god compiler oversætter "-1" til én maskininstruktion DEC <register>

Om hashfunktionen

Faktum vi må leve med: Kollisioner kan ikke undgås

Krav til god hashfunktion

- skal sprede sig så godt som muligt over hele intervallet
  - ramme alle celler
  - og ca. lige meget
  - og det for en *typisk* mængde af objekter.
- skal kunne beregnes effektivt

Eksempel på dårlig hashfunktion . . . .

Eksempel på dårlig hashfunktion med tableSize = to-talspotens

```
int hash(String key, int tableSize) {
   int hashVal = 0;
   for (int i = 0; i < key.length(); i++)
      hashVal  = (hashVal * 256 + key.charAt(i)) % tableSize;
   return hashVal}
```

Eksempler:

hash(“Hsdjazd noperun fgkdfgo krpot, krpot, poylgkrs okerpil mkdfg!”, 2048) = 1825

hash(“Der var en gang en mand”, 2048) = 1636
hash(“Han boede i en spand”, 2048) = 1636

Læs i bogen i afsnit 20.2 om at primtal er gode, men der er meget-meget-meget mere i historien om, hvad der gør en hashfunktion god!

**For at forstå det, skal vi lige have en foredrag om heltal i Java —
som er uden kontrol for overflow!!!**

Hvad er overflow?

Eksempel: Regning med tal op til 4 cifre

0020	5500	5502
+ 0099	+ 4499	+ 4503
========	========	========
0119	9999	????

En elektronisk dims kunne måske give

```
   5502
 + 4503
========          Svarer til OVERFLOW kontrol
   EEEE
```

En dum mekanisk dims med fire hjul med hver 4 cifre vil sandsynligvis vise

```
   5502
 + 4503
========          Uden OVERFLOW kontrol
 -1 0005
```

Eksempel med 4-bits aritmetik hvor bit længst til venstre er fortegn

f.eks. $0100 \approx 4_{10}$
$1001 \approx -1_{10}$

1)

```
   0010
 + 0011
========
   0101
```

2)

```
   0111
 + 0111
========
 0 1110
```

Med overflowkontrol: Eksempel 2 giver anledning til fejlmeddelelse
Uden overflowkontrol: Eksempel 2 regner forkert:

$7 + 7 = -6$!!!! (ralle)

Java's heltal opfører sig ca. på den måde . . . .

Java's heltal opfører sig ca. på den måde:

```
public final class OverFlowTest
{ public static void main( String [ ] args )
   {  int n = 0;int i;
       n = 2147483647;  //  maximal int
      System.out.println("n " + n);
      n = n+17;
      System.out.println("n " + n);
      for(i=0; i< 2147483647; i=i+100000) {n=n+1;}
      System.out.println("SLUT);  } }
```

```
n 2147483647
n -2147483632
^C
```

Programmet gik i løkke pga. overflow og manglende overflowcheck

Eksempel på hashfunktion, som benytter ikke-overflow-check:

```
public static int hashbetter(String key, int tableSize) {
    int hashVal = 0;
    for (int i = 0; i < key.length(); i++)
        hashVal  = hashVal * 37 + key.charAt(i);
    hashVal %= tableSize;
    if(hashVal < 0) hashVal += tableSize;
    return hashVal;}
```

Eksempler ved tableSize = 2039:

a: 97
b: 98
c: 99
aa: 1647
ab: 1648
ac: 1649
ba: 1684

Der var en gang en mand: 1142
Han boede i en spand: 885
Vandmand: 1748
Krikand: 1231
Hsdjazd noperun fgkdfgo krpot, krpot, poylgkrs okerpil mkdfg!: 30

Om hashing i Java API

Standardklasser for

HashSet ~ svarende til de hashede mængder vi har set
– som sædvanligt defineret for Class Object og det pjank med »type casting« hele tiden og så igen :(

HashMap ~ afbildning repræsenteret som hashede mængder,
hvor vi for en objekt X, i tabellen finder ref. til objekt

[X, Værdi]

Bemærk at den generelle klasse Object har metode

hashCode()

som returnerer bare-et-eller-andet-heltal.

For at kunne bruge HashMap og HashSet på sine egne objekter må man altså huske at skrive en hashCode() metode.

Eksempel på indbygget hashCode() for tekststrenge:

```
public final class HaCo
{ public static void printHash(String s)
  {System.out.println(s + ": " + s.hashCode());}

 public static void main( String [ ] args )
   { printHash("a");
     printHash("b");
     . . . .
     printHash("Hsdjazd noperun fgkdfgo krpot, krpot, poylgkrs okerpil mkdfg!");
   }}
```

a: 97

b: 98

c: 99

aa: 3104

ab: 3105

ac: 3106

ba: 3135

Der var en gang en mand: –904611645

Han boede i en spand: –1964416372

Hsdjazd noperun fgkdfgo krpot, krpot, poylgkrs okerpil mkdfg!: –505073700

Både positive og negative tal returneres

Dvs. implementation af hashtabel skal teste >= 0 og tage modulo (%) tabelstørrelse

Implementation af Java.util's HashSet og HashMap:

Baseret på

- "quadratic probing" med primtal som tabellængde
- "Re-hashing", hvis tabel bliver halvt fuld, så fordobles tabellen (rundet op til næste primtal)

Sletning foretages ved at indsætte en boolean i hver celle

active = true ~ som vi forventer

active = false ~ pågældende felt har været indsat,

men slettet igen (og skal ignoreres)

Nødvendig pga. "probing" da ægte sletning for bøvlet!

Ellers ingen overraskelser, kig på koden i afsnit 20.4.1.

Hashtabellen "sander til" over tid; typisk løsning: Genopbyg tabellen i løbet af natten

~ Tak for Deres opmærksomhed ~