Træer

En meget vigtig datastruktur
Repræsentation af **sprog** (i meget generel betydning), **syntakstræer:**
    Java (i en compiler), SQL (i et databasesystem), XML ....
    Naturligt sprog

Søgetræer:
    Generel repræsentation af (sorterede) mængder og funktioner
    Databasesystemer....

Dagens program:
    Hvad er et træ (datalogisk set)?
    Eksempel på syntakstræer udtrykt vha. nedarvning
        NB: udenfor bogen; find Javafiler via kursets hjemmeside
    Java-stil implementation af generiske træer
        Traversering af træer vha. TreeIterator preorder, postorder, inorder, levelorder
    Binære søgetræer
    Princip og generisk implementation i Java
    Balancerede træer, AVL-træer (+ omtale af et par andre)

Hvad er et træ?

Matematikeren:

Et specialtilfælde af en graf:
En sammenhængende skov, hvor en skov er en orienteret, acyklisk graf, med højst én vej mellem to forskellige knuder
Og så kan vi jo bare bruge kendte repræsentationer for grafer og grafalgoritmer...

Datalogen udnytter naturlig rekursion:

Et træ består af et stykke data samt nul eller flere træer kaldet deltræer

Træalgoritmer

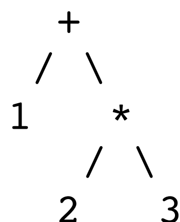
Naturligt rekursive
f.eks. summe træer med tal ...
$Sum(t(k,T_1,...,T_n)) = k + Sum(T_1) + ... + Sum(T_n)$
En gang imellem benytte en stak (og sommetider en kø...)

Eksempel på repræsentation af syntaktræer vha. nedarvning

Træer for udtryk defineret ved følgende “abstrakte” grammatik

<udtryk> ::= <tal>
| <udtryk> + <udtryk>
| <udtryk> * <udtryk>

Et udtrykstræ er enten
Et tal-træ, som indeholder en talkonstant (og 0 deltræer)
Et plus-træ har to deltræer, som er udtrykstræer
Et gange-træ har to deltræer, som er udtrykstræer



Brug af Javas nedarvning til repræsentation af syntakstræer

```
abstract class ExpressionTree { }

class PlusTree extends ExpressionTree
{ ExpressionTree first; ExpressionTree second;
  public PlusTree(ExpressionTree f, ExpressionTree s) {first=f;second=s;}
}

class TimesTree  extends ExpressionTree
{ ExpressionTree first; ExpressionTree second;
  public TimesTree(ExpressionTree f, ExpressionTree s) {first=f;second=s;}
}

class NumberTree extends ExpressionTree
{ int value;
  public NumberTree(int v) {value=v;}}
```

(Alternativt: Definere klasse for binære operatorer, og så specialisere den...)

Nedarving udnyttes til at definere et typehierarki — modsat "generiske" træer i Java-stil.

Syntakstræer kan bygges eksplicit

```
ExpressionTree exp  =
        new PlusTree (   new NumberTree(1),
                         new TimesTree(         new NumberTree(2),
                                                new NumberTree(3)));
```

Eller i praksis ved en *parser*, som læser tegn ind fra fil og konstruerer træ efterhånden, enten

top-down, eller
bottom-up

Rekursive metoder udnytter også nedarvning....

```
exp.printStackCode();
==>
        PUSH 1
        PUSH 2
        PUSH 3
        TIMES
        PLUS

abstract class ExpressionTree
{   public abstract void printStackCode(); }

class PlusTree extends ExpressionTree
{  ExpressionTree first; ExpressionTree second;
   public void printStackCode()
      {first.printStackCode();
       second.printStackCode();
       System.out.println("PLUS");} }

class TimesTree  extends ExpressionTree
{ ExpressionTree first; ExpressionTree second;
  public void printStackCode()
      {first.printStackCode();
       second.printStackCode();
       System.out.println("TIMES");}  }

class NumberTree extends ExpressionTree
{ int value;
  public void printStackCode()
    {System.out.println("PUSH "+value);}  }
```

Analogt "post-order traversal" ≈

1. gør noget ved deltræerne, 2. gør noget for denne knude

```
exp.printExpression();
==> (1+(2*3))

abstract class ExpressionTree
{ public abstract void printExpression(); }

class PlusTree extends ExpressionTree
{   ExpressionTree first; ExpressionTree second;
    public void printExpression()
      {System.out.print("(");
       first.printExpression();
       System.out.print("+");
       second.printExpression();
       System.out.print(")");}  }

class TimesTree  extends ExpressionTree
{  ExpressionTree first; ExpressionTree second;
   public void printExpression()
      {System.out.print("(");
       first.printExpression();
       System.out.print("*");
       second.printExpression();
       System.out.print(")");}   }

class NumberTree extends ExpressionTree
{  int value;
   public void printExpression()
     {System.out.print(value);}   }
```

Ser vi bort fra udskrift af parenteserne: Analogt "in-order traversal" ≈

1. Gør noget ved venstre deltræ,
2. Gør noget for denne knude,
3. Gør noget ved højre deltræ

```
exp.printLispCode ();
==> (PLUS 1(TIMES 2 3))

abstract class ExpressionTree
{ public abstract void printLispCode(); }

class PlusTree extends ExpressionTree
{   ExpressionTree first; ExpressionTree second;
    public void printLispCode()
      {System.out.print("(PLUS");
       first.printLispCode();
       second.printLispCode();
       System.out.print(")");}  }

class TimesTree  extends ExpressionTree
{   ExpressionTree first; ExpressionTree second;
    public void printLispCode()
      {System.out.print("(TIMES");
       first.printLispCode();
       second.printLispCode();
       System.out.print(")");}  }

class NumberTree extends ExpressionTree
{   int value;
   public void printLispCode()
     {System.out.print(" "+value);}  }
```

Ser vi bort fra udskrift af parenteserne: Analogt “pre-order traversal” ≈

1 Gør noget for denne knude,
2 Gør noget ved deltræerne

Repræsentation af Java-stil generiske binære træer

public class BinaryNode {
   // konstruktorer og de metoder kan kan forvente
    private Object   element;
    private BinaryNode left;
    private BinaryNode right;   }

public class BinaryTree
{ // konstruktorer og de metoder kan kan forvente
   private BinaryNode root;   }

abstract class TreeIterator
{ public TreeIterator(BinaryTree theTree) {t=theTree;current=null;}
  // den slags metoder som hører til en iterator...
  // blandet abstract og def. vha. abstract
  protected BinaryTree t;
  protected BinaryNode current; }

class PostOrder extends TreeIterator
{ //definition af abstrakte metoder fra TreeIterator
  ...
  //internt snask:
  protected static class StNode { }
  protected Stack s; }

class InOrder extends PostOrder { } // usmukt genbrug :(

class PreOrder extends TreeIterator { ... også noget med en stak }

class LevelOrder extends TreeIterator { ... noget med en kø}

```
abstract class TreeIterator {

  public TreeIterator(BinaryTree theTree) {t = theTree; current = null;}

  abstract public void first( );

  final public boolean isValid( ) {return current != null;}

  final public Object retrieve( ) {
       if( current == null ) throw ... ;
       return current.getElement( ); }

  abstract public void advance( );

  protected BinaryTree t;
  protected BinaryNode current;  }
```

class PostOrder extends TreeIterator {...}

Hvis Java havde haft ægte co-rutiner kunne det implementeres ved rekursion

Pseudokode:

```
class PostOrder extends TreeIterator {...}
   public void first {postOrderTraverse(t.getRoot());}

   private void postOrderTraverse(BinaryNode t); {
     if(t==null) return;
     postOrderTraverse(t.getLeft());
     postOrderTraverse(t.getRight());
     current=t;
     detach();
     return;}

  public void advance( ); {resume()}   }
```

Primitiver a la Simula68 (ikke i Java)

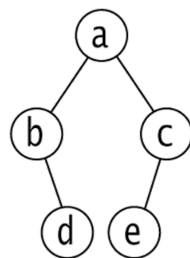
detach() — læg metode til at sove indtil der kommer en resume()
resume() — start en detach'et proces

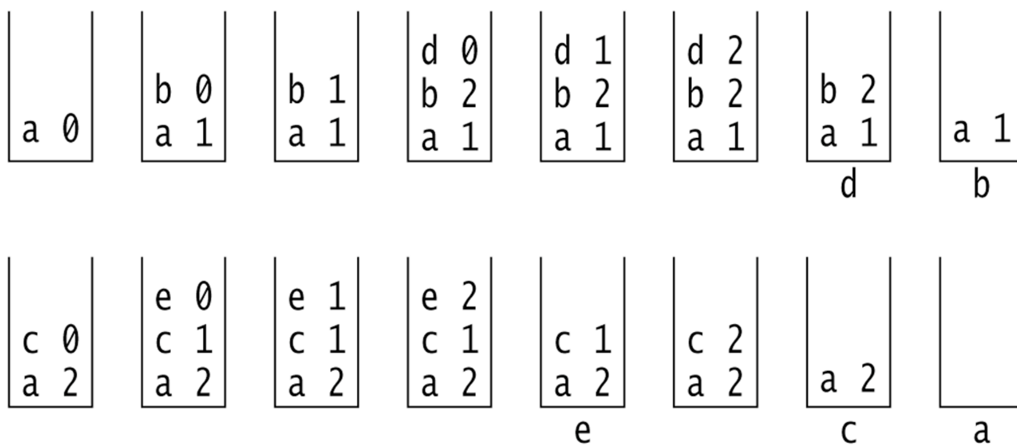
OBS: Preorder og inorder fås ved at bytte rundt linjerne i xxxOrderTraverse()

NB: Det er muligt man kan lave noget i samme stil med Javas tråde, men jeg har ikke checket det!!!

Disse primitiver findes ikke i Java, så derfor programmeres med eksplicit stak.

```
class PostOrder extends TreeIterator {
 // Intern stak i mangel på rekursion:

 protected static class StNode
    { BinaryNode node;
      int timesPopped;
      StNode( BinaryNode n )
       {node = n; timesPopped = 0;}}

protected Stack s;

.... }
```





```
class PostOrder extends TreeIterator {
 // Intern stak i mangel på rekursion:

 protected static class StNode
    { BinaryNode node;
      int timesPopped;
      StNode( BinaryNode n )
       {node = n; timesPopped = 0;}}

protected Stack s;

public PostOrder( BinaryTree theTree )
    {super(theTree); s=new ArrayStack();
     s.push(new StNode(t.getRoot()));}

  public void first( )
    {s.makeEmpty( );
     if( t.getRoot( ) != null ) {s.push(new StNode(t.getRoot())); advance();}}
```

public void advance( )

```
  {if( s.isEmpty( ) )
     {if( current == null ) throw ...;
      current = null; return; }
    StNode cnode;
    for( ; ; )
      {cnode = ( StNode ) s.topAndPop( );
       if( ++cnode.timesPopped == 3 ) {current = cnode.node; return;}
       s.push( cnode );
       if( cnode.timesPopped == 1 )
         { if(cnode.node.getLeft() !=null)
                         s.push(new StNode(cnode.node.getLeft()));}
        else  // cnode.timesPopped == 2
       {if(cnode.node.getRight()!=null)
                      s.push(newStNode(cnode.node.getRight()));}}}
}
//NB: der stilles ingen eksamensspørgsmål om hvordan den stak bruges
//  (læreren synes det er noget knoldkode)
```

Binært søgetræ

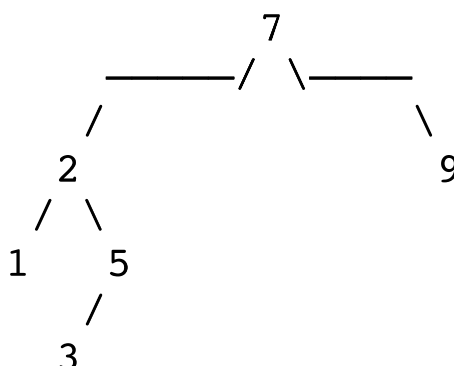
En måde at opbevare og vedligeholde en samling objekter på.

- objekterne holdes sorterede
    - dvs. at finde objekter ≈ log n
- indsættelse af nye objekter kræver ikke ny sortering eller flytning af n/2 elementer
- indsættelse med “inkrementel sortering” ≈ log n

Definition: Et *binært søgetræ* er et binært træ hvor hver knude holder et element af en mængde udstyret med “<” og “=”, således at

alle værdier i venstre deltræ < værdi på knude < alle værdier i højre deltræ

Eksempel



Egenskab: Hvis et binært søgetræ udskrives “in-order” kommer elementerne ud i voksende rækkefølge

Skitse af definition: En binært træ er *balanceret* hvis det er ca. lige dybt over det hele.

Egenskab: Et balanceret, binært træ med n elementer har højde ≈ log n. Dvs. søgning i balanceret, binært søgetræ er O(log n).

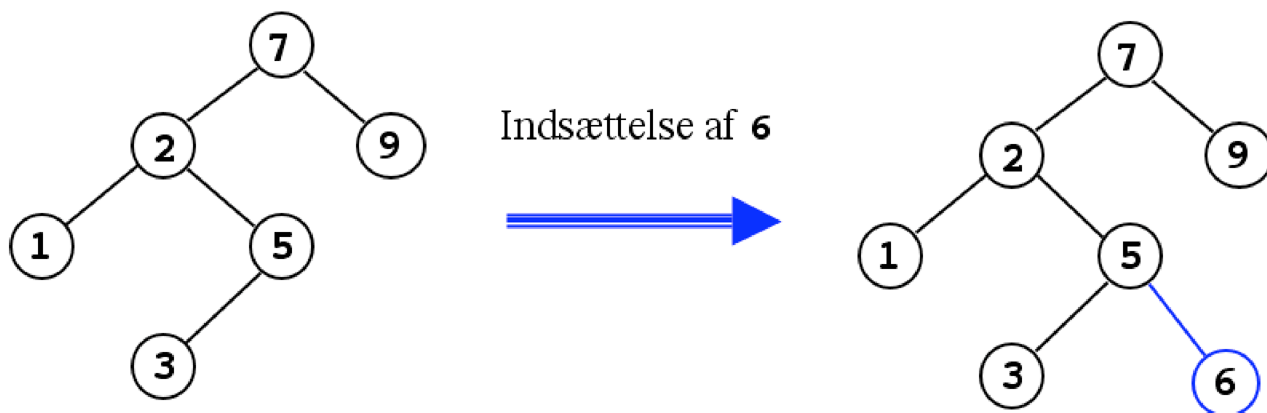
Repræsentation af Binære søgetræer i Java-stil

Upraktisk at specialisere fra BinaryTree fra før, da Object'erne i træet nu skal være Comparable + at der skal lukkes af for modifikationer.

```
class BinaryNode
{ BinaryNode(Comparable theElement){element=theElement;left=right=null;}
  Comparable element;
  BinaryNode left; BinaryNode right; }

public class BinarySearchTree
{ public BinarySearchTree( ) {root = null; }

 // diverse nyttige metoder, bl.a.

 public void insert (Comparable x) { halv-kompliceret stads }

 public Comparable find( Comparable x ) // returnerer x hvis den findes;ellers null
   { return elementAt( find( x, root ) );}

 private Comparable elementAt( BinaryNode t )
   {return t == null ? null : t.element;}

 private BinaryNode find( Comparable x, BinaryNode t )
   { while( t != null )
       { if( x.compareTo( t.element ) < 0 ) t = t.left;
         else if( x.compareTo( t.element ) > 0 ) t = t.right;
         else return t; }
     return null; }

 protected BinaryNode root;  }
```

Indsættelse af element x ≈

At lede efter elementet x, og hvis det ikke findes, indsætte det, hvor det burde have været:

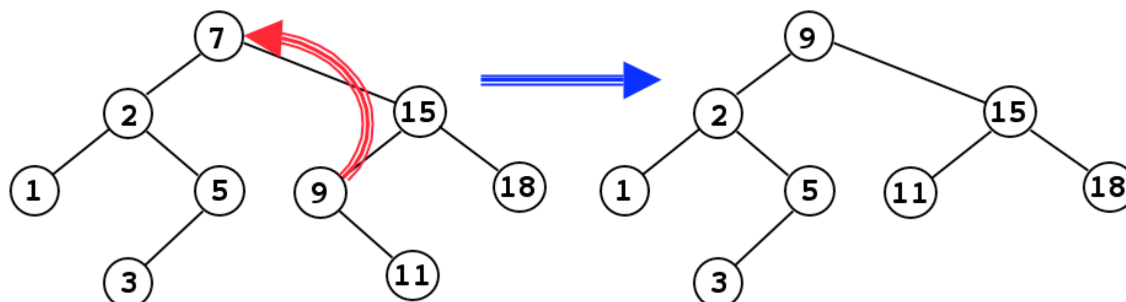


I Java:

```
//Metode i BinarySearchTree:
public void insert(Comparable x) { root = insert(x, root); }

BinaryNode insert(Comparable x, BinaryNode t) {
   if (t == null)
      t = new BinaryNode(x, null, null);
   else if (x.compareTo(t.element) < 0)
      t = insert(x, t.left);
   else if (x.compareTo(t.element) > 0)
      t = insert(x, t.right);
   else
      throw new DuplicateItemException(x.toString());
   return t;  }
```

Sletning af element x i binært søgetræ

Bemærk: Problemet kan altid reduceres til at fjerne x i position som rod af et træ (det undertræ, som har x i toppen).



Erstat roden med den knude, der er mindst i rodens højre undertræ.
Denne knude befinder sig længst til venstre i rodens højre undertræ.
Hvis det højre undertræ er tomt, fjernes roden blot fra træet.

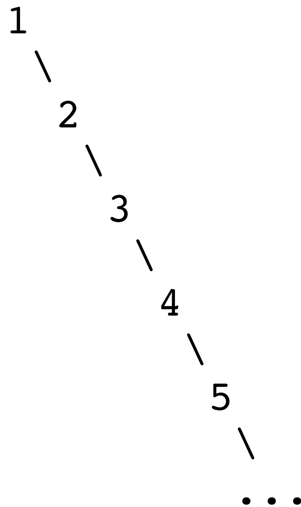
I Java:

```
public void remove(Comparable x) {root = remove(x, root);}

protected BinaryNode remove( Comparable x, BinaryNode t )
   {if( t == null ) throw new ItemNotFoundException( x.toString( ) );
     if( x.compareTo( t.element ) < 0 ) t.left = remove( x, t.left );
     else if( x.compareTo( t.element ) > 0 ) t.right = remove( x, t.right );
     else if( t.left != null && t.right != null ) // Two children
       { t.element = findMin( t.right ).element;
         t.right = removeMin( t.right ); }
      else t = ( t.left != null ) ? t.left : t.right;
      return t; }
```

findMin ≈ søg til venstre
removeMin ≈ søg rekursivt til venstre, og da minimum element ikke har to undertræer, kan træet "trækkes sammen"

Dette er altsammen meget godt, men det er kun interessant hvis indsættelser og sletninger ankommer således passende at træet forbliver balanceret.

Eksempel: Værdier indsættes i voksende rækkefølge:



Træet degenererer til en hægtet liste. O(log n) ==> O(n) :(

Altså: Indsættelse og sletning skal justere på træet så det er nogenlunde balanceret.

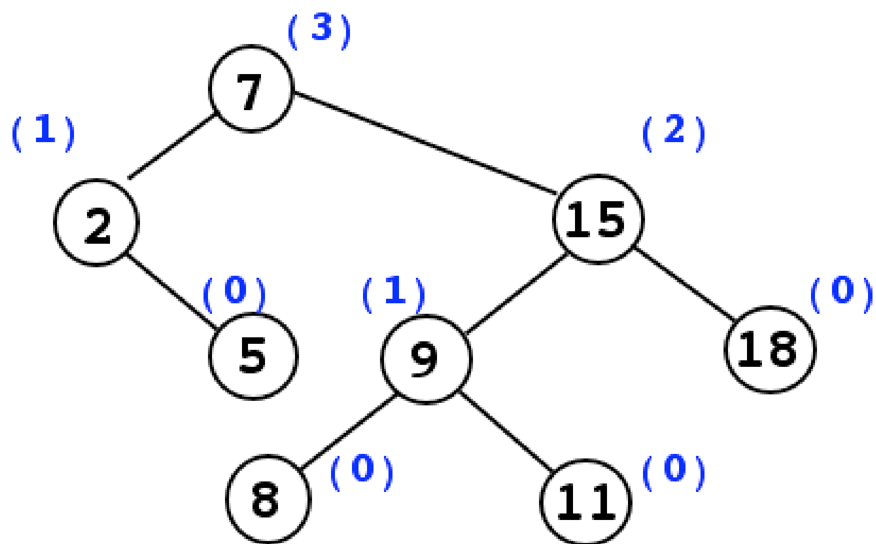
Bogen omtaler forskellige strategier (og der er mange andre beskrevet i litteraturen)

Vi nøjes med at skitsere AVL-træer!

AVL-træer (Adelson-Velskii og Landis, 1962)

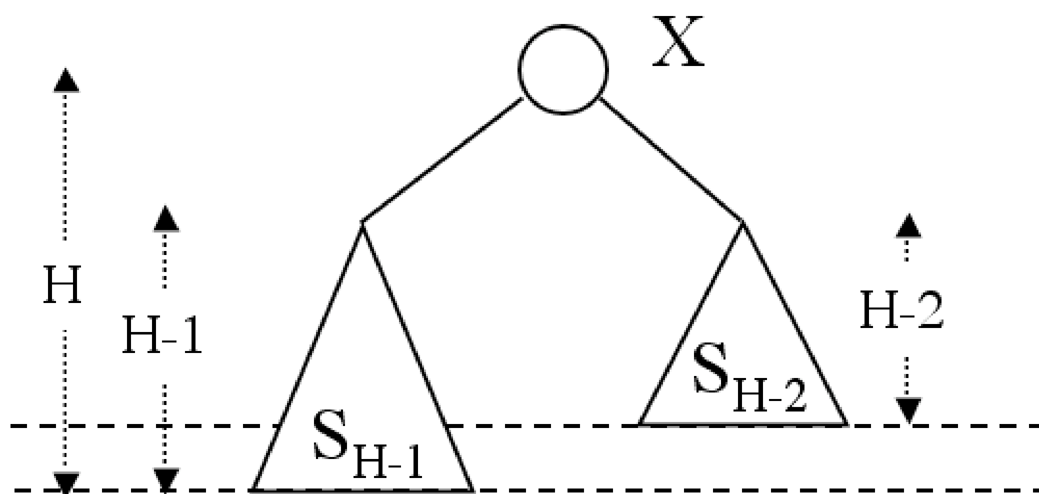
For enhver knude i træet gælder, at højden af dens venstre undertræ og højden af dens højre undertræ højst afviger med 1.

Eksempel på AVL-træ:



Det kan bevises, at denne egenskab er tilstrækkelig for at sikre log n dybde.

Skitse af metode for indsættelse i AVL-træ

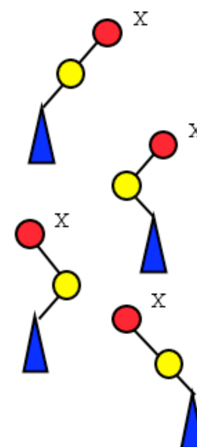


Indsættelse i X's venstre undertræ kan ødelægge AVL-egenskaben.

I det følgende betegner X den "dybeste" knude, som er rod i et deltræ, der ikke længere opfylder AVL-egenskaben.

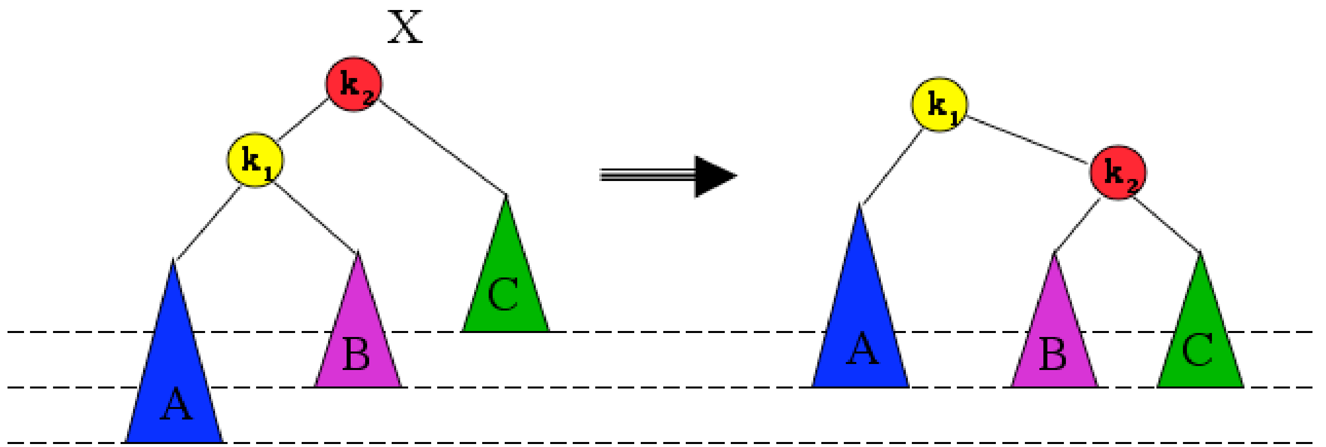
Ved indsættelse i et af X's undertræer er der 4 mulige tilfælde:

1. Indsættelsen sker i det *venstre* undertræ af X's *venstre* søn.
2. Indsættelsen sker i det *højre* undertræ af X's *venstre* søn.
3. Indsættelsen sker i det *venstre* undertræ af X's *højre* søn.
4. Indsættelsen sker i det *højre* undertræ af X's *højre* søn.

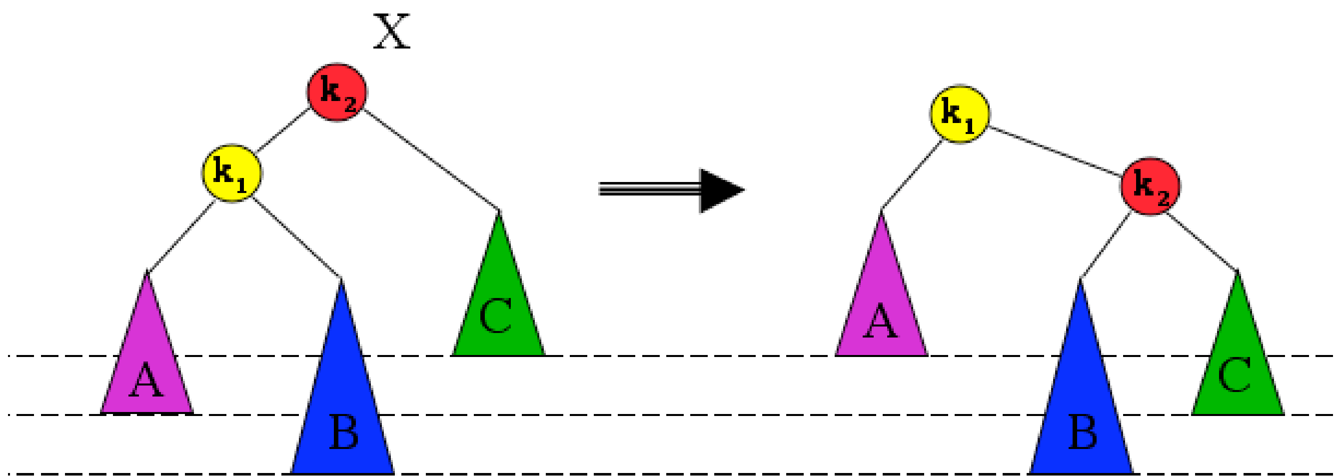


Tilfælde 1 og 4 er symmetriske.
Tilfælde 2 og 3 er symmetriske.

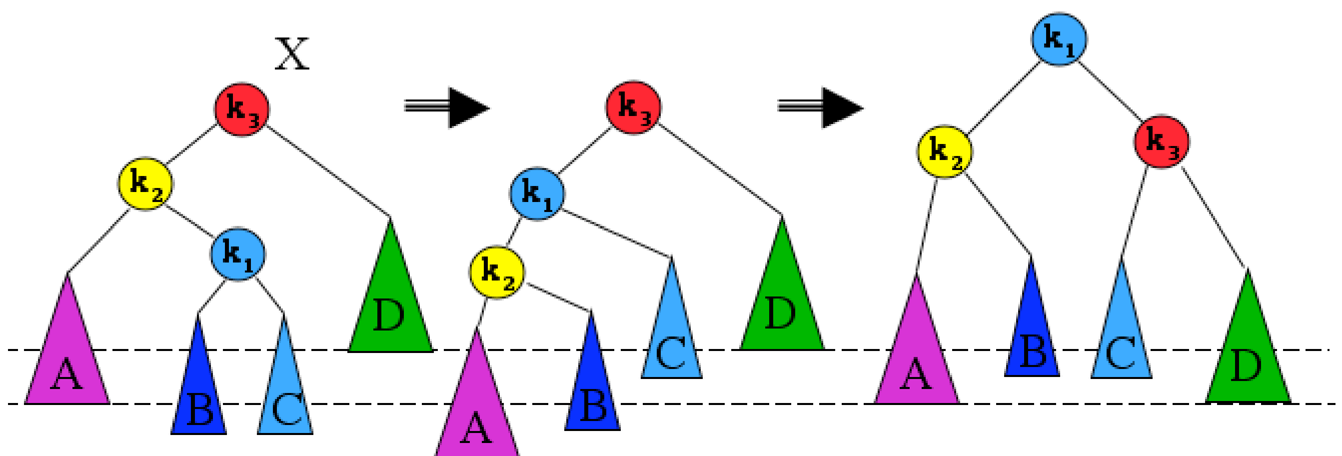
Tilfælde 1: En højrerotation genskaber balancen



Tilfælde 2: En højrerotation genskaber ikke balancen



Der skal en dobbeltrotation til:



Først rotere til venstre i venstre deltræ; dernæst til højre i hele træet!

— —

Vi skåner tilhøreren (og læreren!) for implementationen i Java!

Afslutning:

Træer — vigtig datastruktur til at repræsentere "af natur træagtige ting"

syntakstræer
katalogstrukturer
procestræer i operativsystemer
....

(Binære) søgetræer:

Vigtig datastrukturer til effektiv lagring og genfinding.
Essentielt: At holde træerne balancerede!
Databasesystemer er fyldt med træer og balanceringsalgoritmer
....

og hashing som vi kommer til senere...